2と3の違い[1]

岡本 吉央
電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・通信工学専攻
okamotoy@uec.ac.jp

0　はじめに

アルゴリズムや計算理論が対象とする問題には簡単なものと難しいものがある．簡単な問題はいわゆる「P 問題」であり，多項式時間で解ける問題を指す．一方，難しい問題はいわゆる「NP 困難問題」であり，現在のところ，多項式時間で解けるとは知られておらず，$P \neq NP$ という仮定の下では多項式時間で解けない．

問題の中にはある種のパラメータを持つものが存在する．そのパラメータの変化と問題の難しさにどのような関係があるのか，ということについて，知られていることを見てみたい．ここで挙げる例は，私の興味や知っていることに寄っているため，もちろん網羅的ではない．その点には注意する．

伝えたいメッセージは 2 つある．1 つは，計算というものにまつわる「現象」が存在する，ということである．自然科学は多くの観察から始まる．その対象が天体であれば天文学になり，生物であれば生物学になる．ここでは，計算にまつわる現象を観察して，計算を自然科学として捉えることの足がかりを提供したい．もう 1 つは，そのような現象を説明するための計算理論が未熟であることを指摘することである．つまり，古典力学における運動方程式であったり，分子生物学における DNA のような指導原理が計算理論においてまだはっきりと見いだされていないのだと私は思う．現状の計算理論が行っていることは観察のための道具を提供することであり，それは，天文学における望遠鏡であったり，物理学における泡箱のようなものを作っていることに留まっている気がする．これが現状の計算理論に対して私が持っている認識である．

本稿の構成は以下のとおりである．まず，次の節では「2 と 3 の違い アラカルト」として，パラメータの値が 2 であるときと 3 であるときに問題の難しさが急激に変わる例をいくつか紹介する．その次の節では「充足可能性問題に焦点を絞って」として，充足可能性問題の難しさが急激に変わる現象を特に詳しく見ていく．そして，最後の節では「パラメータ化計算量理論」として,「どんな問題も急激に変わる現象を見せるのか？」という問いに関する考察を行う．

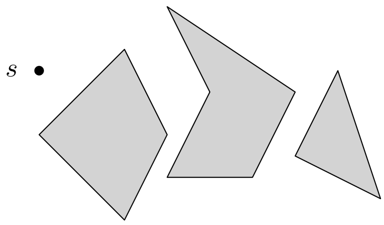
---

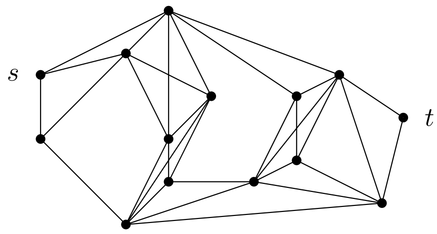
[1]本稿の内容は 2011 年 10 月 18 日に名古屋工業大学情報フロンティアセミナーにおいて筆者が行った講演に基づいている．講演の機会を作って頂いた名古屋工業大学の泉泰介先生に感謝する．

1　2と3の違い アラカルト

1.1　最短路問題

多角形障害物のある平面上の環境において，指定された始点と終点を結ぶ最短経路を探す問題を考える (下の左図参照) .





この問題は以下の方法を用いて多項式時間で解くことができる．まず，可視性グラフ (visibility graph) を構成する．これは，指定された始点と終点，そして，多角形障害物の頂点を頂点集合とするグラフであり，辺は障害物に遮られずに互いに見ることのできる頂点間にすべて引く (上の右図参照) . 各辺の長さをその端点間のユークリッド距離とする．これは多角形障害物の頂点総数が n であり，可視性グラフの辺数が m であるとき，$O(m + n \log n)$ 時間で計算できる [GM91].

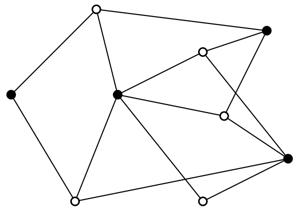
このグラフにおいて，始点から終点へ至る最短路を計算すればよい．これは，例えば Dijkstra のアルゴリズムを用いると，多項式時間で計算できる．

この問題に対する現在最速のアルゴリズムは Hershberger と Suri [HS99] によるもので，計算時間は $O(n \log n)$ である．

しかし，同様な問題は 3 次元において NP 困難となる [CR87]．すなわち，多面体障害物のある 3 次元空間中の環境において，指定された始点と終点を結ぶ最短経路を計算することは難しいのである．

1.2　グラフの彩色可能性

無向グラフの各辺の両端点を違う色で塗ることが可能かどうか問うのが彩色可能性問題である．使用する色の数が 2 の場合，つまり 2 彩色可能性問題は，線形時間で解くことができる．これは，グラフが二部グラフかどうかを問うことと同値であり，適当な探索アルゴリズム (例えば，深さ優先探索) により，判定ができる．



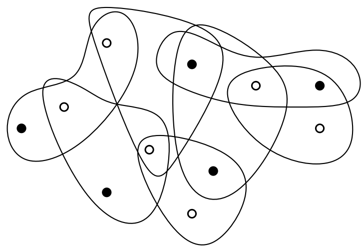
しかし，色の数が 3 の場合，つまり 3 彩色可能性問題は NP 完全である [Kar72].

1.3　ハイパーグラフの 2 彩色可能性

無向グラフの 2 彩色可能性を一般化する方向として，前節では使用する色の数を 3 に増やしたが，そうではない方法を考えてみる．つまり，無向グラフでは，2 つの頂点を結んで辺を構成していたが，その「2 つの頂点」という部分を「3 つの頂点」に変えるのである．これは，設定をハイパーグラフへ拡張することに対応する．

正整数 k に対して，k 一様ハイパーグラフとは，頂点集合 V と辺集合 E の対 $H = (V, E)$ で，E が V の要素数 k 部分集合の集まりであるようなもののことである．特に，2 一様ハイパーグラフは通常の無向グラフと同一視できる．

k 一様ハイパーグラフが 2 彩色可能であるとは，その頂点に赤か青の色を割り当てて，どの辺も「赤だけ」あるいは「青だけ」にならないようにできることである．どの辺も赤と青の 2 色を含む必要がある．図は $k = 3$ の場合で，都合上，白と黒で色を表している．

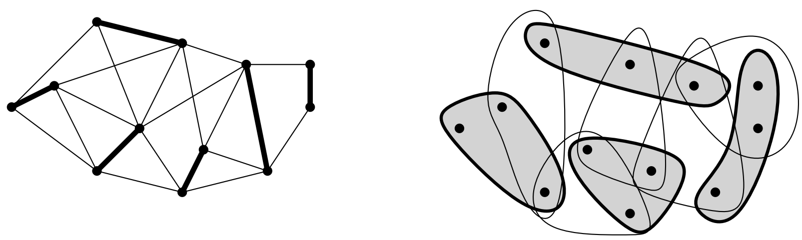


2 一様ハイパーグラフに対する 2 彩色可能性判定問題は前節で述べたとおり線形時間で解けるが，3 一様ハイパーグラフに対する 2 彩色可能性判定問題は NP 完全である [Lov73].

1.4　グラフの完全マッチング

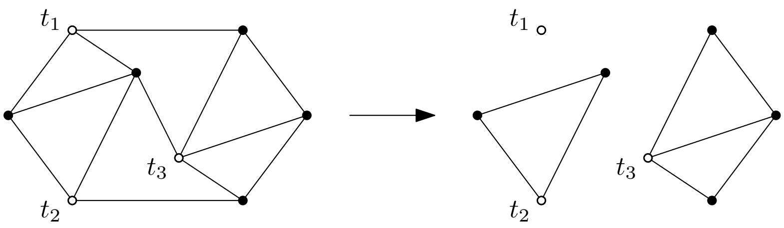
無向グラフ $G = (V, E)$ の完全マッチングとは，辺部分集合 $M \subseteq E$ で，任意の頂点 $v \in V$ に対して，ある辺 $e \in M$ が存在して，e が v に接続するもののことである．与えられた無向グラフに完全マッチングが存在するか判定する問題は多項式時間で解ける [Edm65].

完全マッチングを k 一様ハイパーグラフに対する概念へ一般化する．k 一様ハイパーグラフ $H = (V, E)$ の完全マッチングとは，辺部分集合 $M \subseteq E$ で，任意の頂点 $v \in V$ に対して，ある辺 $e \in M$ が存在して，e が v に接続するもののことである．与えられた 3 一様ハイパーグラフに完全マッチングが存在するか判定する問題は NP 完全である [Kar72].



1.5　最小 k 端子カット

無向グラフ $G = (V, E)$ とその k 個の頂点 $t_1, \ldots, t_k$ が与えられたとき，できるだけ小さい数の辺を G から取り除くことですべての $i < j$ に対して t_i から t_j に至る道を破壊したい．これが最小 k 端子カット問題である．

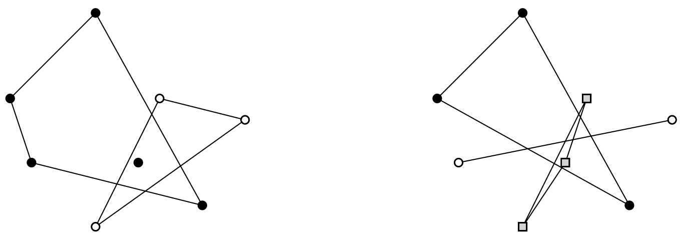


$k = 2$ のとき，これは最小カット問題となり，最大流問題に対するアルゴリズムを用いて多項式時間で解ける．一方，$k = 3$ のとき，この問題は NP 困難である [DJP+94].

1.6　Tverberg 分割

d 次元ユークリッド空間に有限個の点が与えられる．この点集合を 2 分割してそれらの凸包を交わらせることはできるか，という問いを考える．

そのような分割が常に可能であるわけではないが，この判定問題は簡単な線形代数の知識から多項式時間で解けることが分かる．



この「2 分割」の部分を「3 分割」にした場合はどうだろうか？ この場合も，そのような分割が常に可能であるわけではないが，対応する判定問題は NP 完全である [Kal10].

1.7　充足可能性問題

連言標準形の命題論理式で，各節のリテラル数がちょうど k であるものを k-CNF 論理式と呼ぶ．与えられた k-CNF 論理式が充足割当を持つか判定する問題が充足可能性問題であり，よく k-SAT と呼ばれる．

$$(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_4} \vee x_1) \wedge (\overline{x_5} \vee x_3) \wedge (x_5 \vee x_1)$$

充足割当：$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$

$k = 2$ のとき，この問題，つまり，2-SAT は多項式時間で解ける [Kro67, EIS76, APT79]．しかし，$k = 3$ のときは NP 完全である [Kar72].

1.8　この節のまとめ

この節では，様々な問題に対して，パラメータの値が 2 であるときは多項式時間で解けるが，それが 3 になると NP 完全 (あるいは，NP 困難) になるという結果を見てきた．

では，どうして 2 と 3 の間にこのような違いが存在するのだろうか？ この問いに対する満足な解答は得られていない．また，他の問題においては，3 と 4 の間や 4 と 5 の間に違いがある場合もあるので，2 と 3 という数に大きな意味があるのかどうかも分からない．このような違いを上手に説明できないことは，計算理論が十分に発達していない証であるように思える．

2　充足可能性問題に焦点を絞って

前節の最後に 3-SAT が NP 完全であるという事実を紹介した．では，3-SAT を難しくしている理由をより詳細に調べるために，3-CNF 論理式の構造をもっと詳しく見ていきたい．

2.1　変数の生起回数による精緻化

k-CNF 論理式において，各変数が生起する回数を数える．その回数がどの変数に対しても s 以下であるとき，論理式を (k, s)-CNF 論理式と呼ぶことにする．入力を (k, s)-CNF 論理式に限定した充足可能性問題を (k, s)-SAT と呼ぶことにする．

例えば，$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$ は 3-CNF 論理式であるが，各変数の生起回数を見ると，x_1 は 2 回，x_2 は 2 回，x_3 は 3 回，x_4 は 2 回生起しているので，これは $(3, 3)$-CNF 論理式である．

3-SAT について，Tovey [Tov84] は以下のことを証明した．(1) $s \leq 3$ のとき，任意の $(3, s)$-CNF 論理式は充足可能 (つまり，$(3, 3)$-SAT は自明な問題)．(2) $s \geq 4$ のとき，$(3, s)$-SAT は NP 完全．つまり，$(3, s)$-SAT に対しては，s が 3 以下か 4 以上か，という部分で難しさに劇的な変化がある．

同じような現象が 4-SAT にもある．(1) Tovey [Tov84] によると，$s \leq 4$ のとき，任意の $(4, s)$-CNF 論理式は充足可能である．(2) Dubois [Dub90] によると，$s \geq 6$ のとき，$(4, s)$-SAT は NP 完全である．さらに，Stříbrná [Stř94] によると，$s \geq 5$ のとき，$(4, s)$-SAT は NP 完全である．つまり，$(4, s)$-SAT に対しては，s が 4 以下か 5 以上か，という部分で難しさに劇的な変化がある．

これは，3-SAT や 4-SAT だけではなく，一般の k-SAT に対して言える性質である (ただし，$k \geq 3$)．すなわち，以下が知られている [KST93]．任意の $k \geq 3$ に対して，ある $f(k)$ が存在して以下が成り立つ．(1) $s \leq f(k)$ のとき，任意の (k, s)-CNF 論理式は充足可能である．(2) $s \geq f(k)+1$ のとき，(k, s)-SAT は NP 完全である．つまり，任意の $k \geq 3$ に対して，(k, s)-SAT の難しさについて，s が $f(k)$ 以下か $f(k) + 1$ 以上か，という部分で劇的な変化があるのである．

2.2　分岐点 $f(k)$ の値

先ほどの議論から，$f(3) = 3$，$f(4) = 4$ の成立が分かる．この 2 つの値を見ると，一般に $f(k) = k$ となるのではないか，と思いたくなる．しかし，実際は次のことが知られている．

まず，k が小さい場合，例えば，$k = 3, \ldots, 9$ に対しては，次の表に示すような上界と下界が $f(k)$ に対して知られている．

k	$f(k)$ に対する下界		$f(k)$ に対する上界	
3	3	[Tov84]	3	[Tov84]
4	4	[Tov84]	4	[Stř94]
5	5	[Tov84]	7	[HS05]
6	7	[BKS03]	11	[HS05]
7	13	[BKS03]	17	[HS05]
8	24	[BKS03]	29	[HS05]
9	41	[BKS03]	51	[HS05]

これを見れば，まず $f(k) = k$ が一般には成り立たないということが分かる．$f(5)$ の値さえ決定されていない，という現状も分かる．

では，$f(k)$ はどのように増加するのだろうか？ 実はそのような漸近的評価は詳細に理解されている．歴史を順に追っていくと，まず，Tovey [Tov84] により $f(k) \geq k$ が証明された．続いて，Kratochvíl ら [KST93] により，$\lfloor 2^k/(\mathrm{e}k) \rfloor \leq f(k) \leq 11 \cdot 2^{k-5}$ が証明された．つまり，この時点で，漸近的に $f(k) = \Omega(2^k/k)$ という下界と $f(k) = O(2^k)$ という上界が分かっていたことになる．この中で実際タイトなものは下界の方で，歴史はこの後，上界を改善することに費やされた．それは，Savický と Sgall [SS00] による $O(2^k/k^{0.26})$，Hoory と Szeider [HS06] による $O((2^k \log k)/k)$ と続き，最終的に，Gebauer [Geb12] が $O(2^k/k)$ という上界を証明した．実は，このオーダー記法に隠された係数まで分かっていて，それは

$$f(k) = \left(\frac{2}{\mathrm{e}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\frac{2^k}{k}$$

という評価である [GST11].

2.3　この節のまとめ

k-SAT は $k \leq 2$ ならば多項式時間で解け，$k \geq 3$ ならば NP 完全であるが，変数の生起回数 s も考慮すると，任意の $k \geq 3$ に対して，ある $f(k)$ が存在し，$s \leq f(k)$ ならば (k, s)-SAT は多項式時間で解け，そうでなければ NP 完全であるという精緻化ができた．この $f(k)$ の振る舞いは漸近的には詳細に理解されているが，厳密な値は $k = 5$ の場合でも決定されていない．

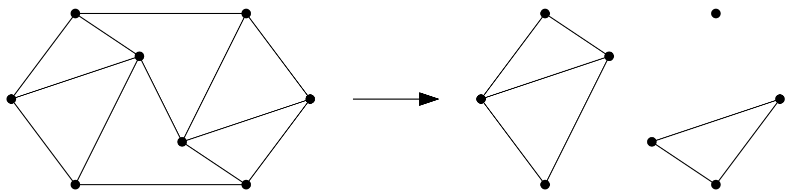
このように「難しさが劇的に変化する」という現象は k-SAT や (k, s)-SAT だけではなく，他の問題やその精緻化にも存在する．その意味では，SAT だけが特別なわけではないが，SAT 自身の重要性と豊かな構造が多くの研究者を招きいれているようである．

3　パラメータ化計算量理論

ここまでは「難しさが劇的に変化する」という現象を見てきたが，そうすると「どのような問題についても，難しさが劇的に変化する，という現象が見られるのか？」という自然な疑問が湧きあがる．この疑問に対する議論を本節では行いたい．

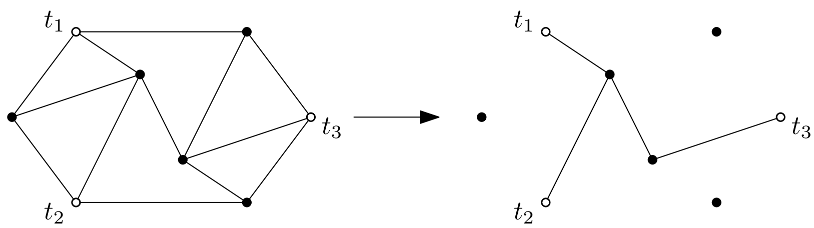
3.1　最小 k カット問題とシュタイナー木問題

最初の節で，最小 k 端子カット問題においては，k が 2 であるか 3 であるかによって，問題の難しさが急激に変化するという現象があることを説明した．その問題と似た問題に最小 k カット問題というものがある．これは，連結な無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，できるだけ小さい数の辺を取り除いて，連結成分の数を k 以上にする，という問題である．



結論を先に言うと，この問題は「急激に難しさが変化する」という現象を見せない．つまり，k が定数である限り，この問題は多項式時間で解けるのである．そのようなアルゴリズムは多数知られているが [GH94, KS96, KYN07]，現在最速の決定性アルゴリズムは Thorup [Tho08] により，その計算量は $O(n^{2k}\mathrm{poly}(\log n))$ である (n は G の頂点数)．なお，この問題は k が入力の一部であるとき NP 困難である．

そのように「k が定数である限り多項式時間で解ける」ような問題の他の例として，シュタイナー木問題がある．これは無向グラフ $G = (V, E)$ とその k 個の頂点 $t_1, \ldots, t_k$ が与えられたときに，これら k 個の頂点を連結するような辺部分集合の中で，要素数が最小のものを見つける問題である．この問題は k が入力の一部であるとき NP 困難であるが，k が定数であれば多項式時間で解ける．古典的には「Dreyfus-Wagner アルゴリズム」と呼ばれる動的計画法に基づくアルゴリズムが有名であり [DW71]，その後，計算量の改善が進展した [FKW07, FKM+07]．現在最速のアルゴリズムは Björklund ら [BHKK07] により，その計算量は $O(2^k n^3)$ である (n は G の頂点数)．



3.2　パラメータ化計算量理論と強指数時間仮説

最小 k カット問題とシュタイナー木問題はどちらも k が定数であるときに多項式時間で解けるということが分かった．しかし，その多項式が k に対してどのように依存するのか，という点はこの 2 つの問題において大きく異なる．最小 k カット問題に対する計算量がおよそ n^{2k} で，シュタイナー木問題に対する計算量がおよそ $2^k n^3$ なので，その 2 つの多項式の次数を k の変化に関して表にしたのが次である．

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最小 k カット問題 (n^{2k} の次数)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
シュタイナー木問題 ($2^k n^3$ の次数)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

この表を見ても分かるとおり，k の増加に沿って最小 k カット問題の計算量として出てくる多項式の次数は増加するが，シュタイナー木問題に対してこれは一定である．この 2 つの種類の多項式には本質的な違いがあるのだろうか？ 例えば，最小 k カット問題は，その次数が k に依存しないような多項式時間で解くことができるのだろうか？

現代的な計算理論において，この枠組は「パラメータ化計算量理論」と呼ばれる文脈で語られることが多い．パラメータ化計算量理論では，多項式の次数がパラメータに依存するか依存しないか，ということに大きな関心が払われる．ここでパラメータ化計算量理論に関する基本的な事項を簡単に紹介する．パラメータ化計算量理論の詳細については，例えば，Flum と Grohe の教科書 [FG06] を参照してもらいたい．

最小 k カット問題のように，問題にパラメータ k が付随している状況を考える．問題自体のサイズは n であるとする．このとき，問題がクラス FPT に属することを，ある関数 f が存在して，それが $O(f(k)\mathrm{poly}(n))$ 時間によって解けることと定義する．例えば，シュタイナー木問題は $O(2^k n^3)$ 時間で解けるので，$f(k) = 2^k$ として，クラス FPT に属することが分かる．FPT とは「fixed parameter tractable」の頭文字を取ったものである．

一方，最小 k カット問題がクラス FPT に属するか，ということは未解決であり，FPT に属さないと予想されている．通常の計算量理論における NP 完全性と同様に，パラメータ化計算量理論においては W[1] 完全性という概念があり，実際，最小 k カット問題は W[1] 完全であることが知られている [DECF+03]．このことから，パラメータ化計算量理論の立場において，最小 k カット問題は FPT に属さないと思われている．すなわち，最小 k カット問題とシュタイナー木問題は本質的に違うと考えられている．

先ほど，シュタイナー木問題は $O(2^k n^3)$ 時間で解けると述べた．では，シュタイナー木問題をより高速に解くことはできるのだろうか？ 例えば $O(1.999^k n^3)$ 時間で解くことはできるのだろうか？

しかし，これは難しいと思われている．と言い切ってしまうのははばかられるが，少なくともこれが難しいと思っている研究者はいる．Cygan ら [CDL+12] は次を証明した．シュタイナー木問題が $O((2-\epsilon)^k \mathrm{poly}(n))$ 時間で解けると仮定すると，集合被覆問題も $O((2-\delta)^n \mathrm{poly}(n, m))$ 時間で解ける．ここで，集合被覆問題とは，要素数 n の集合 S と，その m 個の部分集合 $S_1, S_2, \ldots, S_m$，そして自然数 k を入力として，k 個の部分集合 $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ で，それらの合併が S となるものが存在するか，判定する問題である (そのような k 個の部分集合を S の被覆と呼ぶ)．この問題は NP 完全であるが [Kar72]，$O(2^n \mathrm{poly}(n, m))$ 時間で解けることは知られている [FKW04].

この結果から「シュタイナー木問題を $O(1.999^k n^3)$ 時間で解くことが難しいと思われている」と考えるためには，「集合被覆問題を $O(1.999^n \mathrm{poly}(n, m))$ 時間で解くことが難しいと思われている」ということが正しくなくてはならない．それについて計算理論の研究者の間に合意があるとは思えないが，似た問題については合意のようなものがある．それは「n 変数 SAT を $O(1.999^n \mathrm{poly}(n, m))$ 時間で解けない」という予想で，これは強指数時間仮説と呼ばれている (m は節の数) [CIP09, IPZ01].

強指数時間仮説と集合被覆問題の難しさの関係はよく分かっていない．しかし，Cygan ら [CDL+12] は次を証明した．与えられたCNF論理式の充足割当の個数の偶奇を $O((2-\epsilon)^n \mathrm{poly}(n,m))$ 時間で計算できることと，集合被覆問題の与えられた入力に対して，その被覆の数の偶奇を $O((2-\delta)^n \mathrm{poly}(n,m))$ 時間で計算できることは同値である．すなわち，判定問題ではなく，偶奇問題を考えると，強指数時間仮説と集合被覆問題の難しさは関連付けられる．

以上の考察から，シュタイナー木問題については「2」と「1.999 . . . 」の間に劇的な違いがある，と考えられるのである．

3.3 この節，そして全体のまとめ

本節では,「難しさが劇的に変化する」という現象を持たない問題の例として，最小 k カット問題とシュタイナー木問題を挙げた．そして，そのときの難しさの変化具合がパラメータ化計算量理論と強指数時間仮説に関係することを説明した．

しかし，なぜそのような差異が生まれるのか，ということを現状の計算理論は明確に説明できない．つまり，私たちが計算理論の道具を用いて観察できる現象なのであって，そのような現象がなぜ生起するのかということまで今のところ分からないのである．生物学に例えて言えば，現状の計算理論が得意としていることは，本稿の第 1 節で紹介したような知見をさまざまな問題に対して蓄えるという「博物学」と，それらを計算量クラスという視点でまとめあげる「分類学」である．しかし，その分類さえもままならない，ということは，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ の問題が解決されていないことからも容易に分かる．

残念ながら,「計算科学」ということばは「計算機を用いて科学的探究を行うこと」という意味で用いられるようになっている．英語では computational science と呼ばれる．また,「計算機科学」は「『計算機』を対象とする科学」であり，それはある意味で人工物を対象とした科学である．このような枠組みと「『計算』を対象とする科学」は，全く異なるものであり，より広い意味で計算というものに向き合い，その本質を探ろうとする．しかし，それに対するよい名前が私には思いつかない．このことは，注意しながら考えなくてはいけないが，現状の計算理論が理想的な計算理論なのかどうかすらよく分からない，という認識を私は部分的に持っていて，計算にまつわる現象をよりよく説明するような理論があるならば，そのような理論の構築を模索すべきなのかもしれないと感じている．特に，計算機にまつわる社会的状況の変化に応じて，計算に関連する現象も変化してきている．その一方で，私たちがそのような現象に対して持っている計算理論的理解は乏しく，その認識を読者の皆さんと共有できたならば，本稿の目的はある程度達成できたのではないかと思う．

参考文献

[APT79] Bengt Aspvall, Michael F. Plass, and Robert Endre Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Inf. Process. Lett.*, 8(3):121–123, 1979.

[BHKK07] Andreas Björklund, Thore Husfeldt, Petteri Kaski, and Mikko Koivisto. Fourier meets Möbius: fast subset convolution. In David S. Johnson and Uriel Feige, editors, *STOC*, pages 67–74. ACM, 2007.

[BKS03] Piotr Berman, Marek Karpinski, and Alex D. Scott. Approximation hardness and satisfiability of bounded occurrence instances of sat. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, 10(022), 2003.

[CDL+12] Marek Cygan, Holger Dell, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Jesper Nederlof, Yoshio Okamoto, Ramamohan Paturi, Saket Saurabh, and Magnus Wahlström. On problems as hard as CNF-SAT. In *IEEE Conference on Computational Complexity*, pages 74–84. IEEE, 2012.

[CIP09] Chris Calabro, Russell Impagliazzo, and Ramamohan Paturi. The complexity of satisfiability of small depth circuits. In Jianer Chen and Fedor V. Fomin, editors, *IWPEC*, volume 5917 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 75–85. Springer, 2009.

[CR87] John F. Canny and John H. Reif. New lower bound techniques for robot motion planning problems. In *FOCS*, pages 49–60. IEEE Computer Society, 1987.

[DECF+03] Rodney G. Downey, Vladimir Estivill-Castro, Michael R. Fellows, Elena Prieto, and Frances A. Rosamond. Cutting up is hard to do: the parameterized complexity of k-cut and related problems. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 78:209–222, 2003.

[DJP+94] Elias Dahlhaus, David S. Johnson, Christos H. Papadimitriou, Paul D. Seymour, and Mihalis Yannakakis. The complexity of multiterminal cuts. *SIAM J. Comput.*, 23(4):864–894, 1994.

[Dub90] Olivier Dubois. On the r,s-SAT satisfiability problem and a conjecture of Tovey. *Discrete Applied Mathematics*, 26(1):51–60, 1990.

[DW71] Stuart E. Dreyfus and Robert A. Wagner. The steiner problem in graphs. *Networks*, 1(3):195–207, 1971.

[Edm65] Jack Edmonds. Paths, trees and flowers. *Canad. J. Math.*, 17:449–467, 1965.

[EIS76] Shimon Even, Alon Itai, and Adi Shamir. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM J. Comput.*, 5(4):691–703, 1976.

[FG06] Jörg Flum and Martin Grohe. *Parameterized Complexity Theory (Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series)*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2006.

[FKM+07] Bernhard Fuchs, Walter Kern, Daniel Mölle, Stefan Richter, Peter Rossmanith, and Xinhui Wang. Dynamic programming for minimum steiner trees. *Theory Comput. Syst.*, 41(3):493–500, 2007.

[FKW04] Fedor V. Fomin, Dieter Kratsch, and Gerhard J. Woeginger. Exact (exponential) algorithms for the dominating set problem. In Juraj Hromkovic, Manfred Nagl, and Bernhard Westfechtel, editors, *WG*, volume 3353 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 245–256. Springer, 2004.

[FKW07] Bernhard Fuchs, Walter Kern, and Xinhui Wang. Speeding up the Dreyfus-Wagner algorithm for minimum Steiner trees. *Math. Meth. of OR*, 66(1):117–125, 2007.

[Geb12] Heidi Gebauer. Disproof of the neighborhood conjecture with implications to SAT. *Combinatorica*, 32(5):573–587, 2012.

[GH94] Olivier Goldschmidt and Dorit S. Hochbaum. A polynomial algorithm for the k-cut problem for fixed k. *Mathematics of Operations Research*, 19(1):24–37, 1994.

[GM91] Subir Kumar Ghosh and David M. Mount. An output-sensitive algorithm for computing visibility graphs. *SIAM J. Comput.*, 20(5):888–910, 1991.

[GST11] Heidi Gebauer, Tibor Szabó, and Gábor Tardos. The local lemma is tight for SAT. In Dana Randall, editor, *SODA*, pages 664–674. SIAM, 2011.

[HS99] John Hershberger and Subhash Suri. An optimal algorithm for euclidean shortest paths in the plane. *SIAM J. Comput.*, 28(6):2215–2256, 1999.

[HS05] Shlomo Hoory and Stefan Szeider. Computing unsatisfiable k-SAT instances with few occurrences per variable. *Theor. Comput. Sci.*, 337(1-3):347–359, 2005.

[HS06] Shlomo Hoory and Stefan Szeider. A note on unsatisfiable k-CNF formulas with few occurrences per variable. *SIAM J. Discrete Math.*, 20(2):523–528, 2006.

[IPZ01] Russell Impagliazzo, Ramamohan Paturi, and Francis Zane. Which problems have strongly exponential complexity? *J. Comput. Syst. Sci.*, 63(4):512–530, 2001.

[Kal10] Gil Kalai. Combinatorics with a geometric flavor. In N. Alon, J. Bourgain, A. Connes, M. Gromov, and V. Milman, editors, *Visions in Mathematics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 742–791. Birkhäuser Basel, 2010.

[Kar72] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Raymond E. Miller and James W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, The IBM Research Symposia Series, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.

[Kro67] Melven R. Krom. The decision problem for a class of first-order formulas in which all disjunctions are binary. *Mathematical Logic Quarterly*, 13(1-2):15–20, 1967.

[KS96] David R. Karger and Clifford Stein. A new approach to the minimum cut problem. *J. ACM*, 43(4):601–640, 1996.

[KST93] Jan Kratochvíl, Petr Savický, and Zsolt Tuza. One more occurrence of variables makes satisfiability jump from trivial to NP-complete. *SIAM J. Comput.*, 22(1):203–210, 1993.

[KYN07] Yoko Kamidoi, Noriyoshi Yoshida, and Hiroshi Nagamochi. A deterministic algorithm for finding all minimum k-way cuts. *SIAM J. Comput.*, 36(5):1329–1341, 2007.

[Lov73] László Lovász. Coverings and coloring of hypergraphs. In *Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, pages 3–12, Boca Raton, Florida, 1973.

[SS00] Petr Savický and Jiri Sgall. DNF tautologies with a limited number of occurrences of every variable. *Theor. Comput. Sci.*, 238(1-2):495–498, 2000.

[Stř94] Jitka Stříbrná. Between combinatorics and formal logic. Master's thesis, Charles University, Prague, 1994.

[Tho08] Mikkel Thorup. Minimum k-way cuts via deterministic greedy tree packing. In Cynthia Dwork, editor, *STOC*, pages 159–166. ACM, 2008.

[Tov84] Craig A. Tovey. A simplified NP-complete satisfiability problem. *Discrete Applied Mathematics*, 8(1):85–89, 1984.