グラフの同時埋め込み可能性

岡本 吉央 (東京工業大学)

平成 20 年 6 月 20 日

最近，グラフ描画 (graph drawing) の研究を少しずつ行ない始めて，特に昨年シドニーで行われた International Symposium on Graph Drawing に参加したのはとても楽しい経験でした．そこで盛んに議論されていて，自分も興味深いと思った「同時埋め込み可能性」をこの記事では紹介します．

1　同時埋め込み可能性

グラフを平面上に辺交差なく描ければ，そのグラフは**平面的** (planar) であると呼ばれます (ただし，辺は曲線で描いてもよいです)．平面的グラフについては膨大な研究があり，多くの事実が知られています．よく知られている事実として，頂点数 5 の完全グラフ K_5 と頂点数 3+3 の完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ は平面的でないというものがあります．図 1 にあるグラフが K_5 と $K_{3,3}$ です．

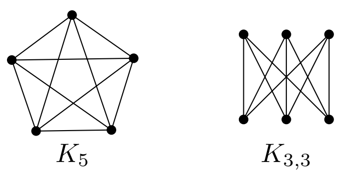

図 1: 非平面的グラフの例.

平面的グラフは常に辺交差なく描けるわけですが，同じ頂点集合上の複数の平面的グラフを同時に辺交差なく描くことはできるのでしょうか？例えば，図 2 にあるような 2 つの閉路 C_1 と C_2 は同じ頂点集合上に定義されていますが，その図の右側にあるように描くと，C_1 の辺と C_2 の辺が交差することはあっても C_1 の辺同士，C_2 の辺同士は交差していません．このような埋め込みを C_1 と C_2 の同時埋め込みと呼ぶのです．また，$C_1 \cup C_2$ は K_5 になっていることも補足しておきます．

では少し形式的な定義を与えます．同一頂点集合 V 上の 2 つの平面的グラフ $G_1 = (V, E_1)$ と $G_2 = (V, E_2)$ が**同時埋め込み可能** (simultaneously embeddable) であるとは，V から平面上の点集合 P への全単射で，G_1 と G_2 が P を頂点集合とする平面埋め込みを持つことです．そのような平面埋め込みを**同時埋め込み** (simultaneous embedding) と呼ぶことにします．同時埋め込みが直線埋め込みである場合，それを**幾何同時埋め込み** (geometric simultaneous embedding) と呼びます．幾何同時埋め込みが存在する 2 つの平面的グラフのことを幾何同時埋め込み可能であると呼びます．2 つの平面的グラフでなく，3 つ，4 つ，それ以上の平面的グラフの同時埋め込み可能性を議論することもできます．

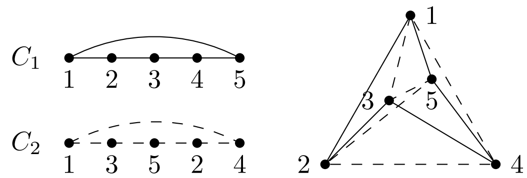

図 2: 同時埋め込みの例.

同時埋め込み可能性を提案したのは Brass, Cenek, Duncan, Efrat, Erten, Ismailescu, Kobourov, Lubiw, Mitechell [1] です．それに続いていくつかの研究論文が出版されています．

まず，任意の 2 つの平面的グラフは同時埋め込み可能なのか考えます．そんなうまいことは成り立たないと思われるかもしれませんが，実は成り立ちます．平面的グラフに関する有名な Pach-Wenger の定理 [8] によると，平面上に与えられた任意の n 個の点を使って頂点数 n の任意の平面的グラフを辺交差なく描けます．そのため，同時埋め込みを考える場合は適当に平面上の点集合を与えて，各平面的グラフに対して Pach-Wenger の定理を適用すればよいだけです．つまり，任意の数の平面的グラフは同時埋め込み可能です．しかし，これでは各辺を表す曲線が過度に複雑になる可能性があります．それを克服するために，Erten と Kobourov [3] は埋め込んだ各

辺が 4 つの線分からなる折れ線として描く同時埋め込みで $O(n^2) \times O(n^2)$ の格子点しか用いないものを $O(n)$ 時間で見つけるアルゴリズムを設計しています (n は頂点数).

2 幾何同時埋め込み可能性

ということで，普通の同時埋め込みについてはつまらなくなったので，幾何同時埋め込みに目を向けて「任意の 2 つの平面的グラフは幾何同時埋め込み可能なのか」を考えます．これも，そんなうまいことは成り立たないと思われるかもしれませんが，こちらの方はその通りで常に成り立つとは限りません．図 3 に示す例は Brass らの論文 [1] に示されているものです．2 つの平面的グラフ G_1, G_2 がありますが，$G_1 \cup G_2$ は $K_{3,3}$ です．そのため，G_1 と G_2 の幾何同時埋め込み可能ならば，G_1 の辺 e_1 と G_2 の辺 e_2 の交差がなくてはなりません．その候補となれるものは $e_1 \in \{\{1,4\},\{3,6\}\}$ と $e_2 \in \{\{1,6\},\{3,4\}\}$ です．なぜなら，それ以外の辺は G_1 と G_2 が共有しているからです．しかし，これらの候補から e_1 と e_2 をどのように選んでもそれらは隣接辺なので (幾何同時埋め込みを考える限り) 交差しません．これで矛盾が導かれました．

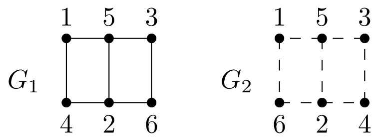

図 3: 同時埋め込み可能ではない例 [1].

図 3 の 2 つのグラフ G_1，G_2 は共に外平面的グラフ (非有界面にすべての頂点が接するような平面埋め込みを持つグラフ) でもあることに注意して下さい．これを「外平面的グラフ × 外平面的グラフは必ずしも幾何同時埋め込み可能ではない」のように表現することにします．つまり，平面的グラフのクラス $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ があるとき「$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ は幾何同時埋め込み可能か？」という問題を考えるわけです．ここでは，まず可能ではないことに関して知られている結果を挙げていきます．

- パス × パス × パスは必ずしも幾何同時埋め込み可能ではありません [1].
- パス × 平面的グラフは必ずしも幾何同時埋め込み可能ではありません [1][1]．また，この場合，辺集合が素であっても幾何同時埋め込み可能であるとは限りません [6]．図 4 の左側に Brass ら [1] の例，右側に Frati, Kaufmann, Kobourov [6] の例を挙げます．
- 木 × 木は必ずしも幾何同時埋め込み可能ではありません [7].

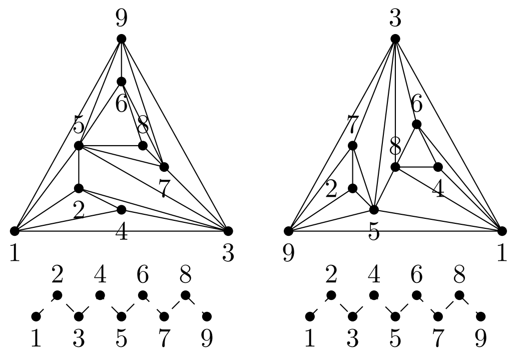

図 4: (左) 幾何同時埋め込み可能ではない平面的グラフとパスの例 [1]．(右) 幾何同時埋め込み可能ではない平面的グラフとパスで，辺集合が素になっている例 [6].

では，幾何同時埋め込み可能である方を見ていきましょう．Brass ら [1] はパス × パスの場合に必ず幾何同時埋め込み可能であることを示しています．その説明のために図 5 を見て下さい．2 つのパス P_1 と P_2 が与えられます．頂点数が n であるとして，$n \times n$ の格子を考えます．この格子の軸に沿って P_1 と P_2 を図のように並べ，同じ頂点を縦と横に見てぶつかるところに点を置きます．それで，P_1 に対しては x 単調に，P_2 に対しては y 単調に置かれた点を結べば望みの幾何同時埋め込みが完成するわけです．交差しないことは単調性から従います．

Brass ら [1] はこれを拡張して，閉路 × 閉路とキャタピラ × キャタピラに対する幾何同時埋め込み可能性を証明しています．ちなみに，キャタピラとは図 6 のように木で，その葉をすべて取り除くとパスになるもののことです．芋虫のように見えるからキャタピラ (caterpillar) です．

幾何同時埋め込み可能性については，かなりのことが分かって来ているわけですが，一番大きな未解

[1] Brass ら [1] の会議録バージョンでこれは未解決問題になっていましたが，Erten と Kouborov [3] によって解決されて，Brass らの論文のジャーナル版にはその解答が掲載されています．

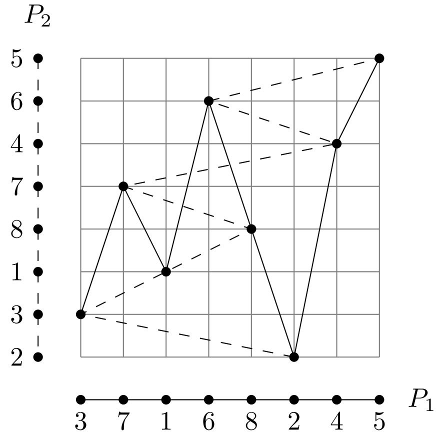

図 5: パスとパスの幾何同時埋め込みの構成法 [1].

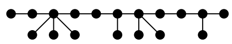

図 6: キャタピラの例.

決問題は

- **パス × 木は必ず幾何同時埋め込み可能か？**

というものです．グラフ描画の研究者たちはこの問題に頭を悩ませています．その他,「パス × 外平面的グラフ」も未解決です．また,

- **木 × 木で，辺集合が素である場合は必ず幾何同時埋め込み可能か？**

も未解決問題であり，これは Frati ら [6] に述べられています.

3 同辺同時埋め込み可能性

同時埋め込み可能性はいつでも成り立ってしまい，幾何同時埋め込み可能性はあまり成り立たないので，その中間の埋め込みを考える人々が出てきました．どのような埋め込みを考えるのかというと，辺を直線分で描く必要はないのですが，両方のグラフが共有する辺は同じ曲線で描かなくてはならないという制限を埋め込みに与えるのです．このような同時埋め込みを英語では simultaneous embedding with fixed edges と呼んでいますが，語呂が悪いので，ここでは**同辺同時埋め込み**と呼ぶことにします．幾何同時埋め込みは同辺同時埋め込みでもあるので，幾何同時埋め込み可能ならば同辺同時埋め込み可能です.

同辺同時埋め込みは同時埋め込みと幾何同時埋め込みの間にある概念なので，同辺同時埋め込み可能でないグラフの対があるかどうかはぱっと見たところよく分からないかと思います．しかし，実は Frati [5] の結果によると，外平面的グラフ × 外平面的グラフは同辺同時埋め込み可能であるとは限りません. Frati [5] の構成した例を図 7 に挙げます.

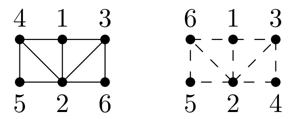

図 7: 同辺同時埋め込み可能ではない例 [5].

同辺同時埋め込み可能なグラフの対に関して何が知られているのでしょうか？Di Giacomo と Liotta [2] は Erten と Kobourov [3] の手法を応用して，パス×外平面的グラフと閉路×外平面的グラフの場合に常に同辺同時埋め込みが可能で，そのとき同辺同時埋め込みを線形時間で与えるアルゴリズムを設計しました．そして，Frati [5] は木×平面的グラフに対して常に同辺同時埋め込み可能であることを示しました．かなり広いクラスに対して同辺同時埋め込み可能であることが分かります．同辺同時埋め込み可能性に関する未解決問題として，例えば

- **カクタス × 平面的グラフは常に同辺同時埋め込み可能か？**

という (広く認知されているわけではない) ものもあります．ここで，カクタスとは図 8 のように各辺が高々1 つの閉路にしか含まれないグラフのことです.

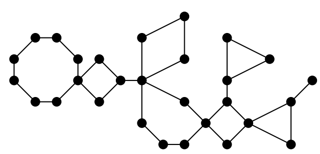

図 8: カクタスの例.

4 計算複雑性

さて，$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ が常に幾何同時埋め込み可能であるとは限らない，あるいは，常に同辺同時埋め込み可能であるとは限らないとき，$\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ からそれぞれグラフが 1 つずつ与えられて，それらの幾何同時埋め込み (あるいは同辺同時埋め込み) が存在するかどうかを判定するという問題はどれ程簡単 (あるいは

難しい) のでしょうか？幾何同時埋め込みに関してこれは Brass ら [1] の論文で挙げられている未解決問題でしたが，最近，Estrella-Balderrama, Gassner, Jünger, Percan, Schaefer, Schulz [4] は幾何同時埋め込み可能性判定問題が NP 困難であり，PSPACE に属することを証明しました．つまり，幾何同時埋め込み可能性判定を多項式時間で行なうことは無理そうだというわけです．しかし，計算複雑性に関しては多くのことが未解決のままです．まず，

- **幾何同時埋め込み可能性判定問題が NP に属するのか？**

ということが分かっていません．しかし，この NP 所属性へ解答を与えることが難しいことも Estrella-Balderrama ら [4] は指摘しています．というのも，彼らはこの問題が NP に属すれば，直線交差数問題も NP に属するということを証明していて，直線交差数問題は NP 困難なのに，NP に属するかどうか分かっていない問題として有名だからです．他には，

- **木 $\times$ 木の場合の幾何同時埋め込み可能性判定問題は NP 困難か？**
- **パス $\times$ 平面的グラフの場合の幾何同時埋め込み可能性判定問題は NP 困難か？**

というように，クラスを制限したときにどうなるか分かっていません．また，

- **パス $\times$ パス $\times$ パスの場合の幾何同時埋め込み可能性判定問題は NP 困難か？**

も分かっていません．多項式時間で解けそうな気もするのですが．そして，最後に

- **同辺同時埋め込み可能性判定は NP 困難か？**
- **辺集合が素な場合の幾何同時埋め込み可能性判定は NP 困難か？**

については平面的グラフ $\times$ 平面的グラフの場合についても分かっていません．

5 しめ

実は WADS 2003 に行っていたので，Brass ら [1] の論文の発表を聞く機会もあったかもしれなかったのですが，そのときは別のセッションに行っていたようです．また，EWCG 2005 に行っていたので，そのときに Di Giacomo と Liotta [2] の論文の発表を聞いているはずです．それなのに，そのときは全然興味を持ちませんでした (聞いた記憶すらないです)．昨年 Graph Drawing 2007 に行って始めて興味を持ったというのはなかなか皮肉なことのようにも思いました．

同時埋め込み可能性について，知られていることと未解決問題を少しずつ紹介しました．いかにも取り組みやすそうな問題に見えます．興味を持たれたらご一報ください．是非研究しましょう．

参考文献

[1] P. Brass, E. Cenek, C.A. Duncan, A. Efrat, C. Erten, D. Ismailescu, S.G. Kobourov, A. Lubiw, J.S.B. Mitechell. On simultaneous planar graph embeddings. Computational Geometry: Theory and Applications **36** (2007) 117–130. A conference proceedings version in Proceedings of 8th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2003), Lecture Notes in Computer Science **2748** (2003) 243–255.

[2] E. Di Giacomo, G. Liotta. A note on simultaneous embedding of planar graphs. Proceedings of 21st European Workshop on Computational Geometry, 2005, pp. 207–210.

[3] C. Erten, S.G. Kobourov. Simultaneous embedding of planar graphs with few bends. Proceedings of 12th International Symposium on Graph Drawing (GD 2004), Lecture Notes in Computer Science **3383** (2004) 195–205.

[4] A. Estrella-Balderrama, E. Gassner, M. Jünger, M. Percan, M. Schaefer, M. Schulz. Simultaneous geometric graph embeddings. Proceedings of 15th International Symposium on Graph Drawing (GD 2007), Lecture Notes in Computer Science **4875** (2007) 280–290.

[5] F. Frati, Embedding graphs simultaneously with fixed edges. Proceedings of 14th International Symposium on Graph Drawing (GD 2006), Lecture Notes in Computer Science **4372** (2007) 108–113.

[6] F. Frati, M. Kaufmann, S.G. Kobourov. Constrained simultaneous and near-simultaneous embeddings. Proceedings of 15th International Symposium on Graph Drawing (GD 2007), Lecture Notes in Computer Science **4875** (2007) 268–279.

[7] M. Geyer, M. Kaufmann, I. Vrto. Two trees which are self-intersecting when drawn simultaneously. Proceedings of 13th International Symposium on Graph Drawing (GD 2005), Lecture Notes in Computer Science **3843** (2005) 201–210.

[8] J. Pach, R. Wenger. Embedding planar graphs at fixed vertex locations. Graphs and Combinatorics **17** (2001) 717–728.