組合せ最適化理論の三次元描像
Three-Dimensional View to Theory of Combinatorial Optimization

岡本 吉央 †
† 東京工業大学大学院情報理工学研究科

Yoshio Okamoto†
†Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

最適化とは，与えられた集合に属する点の中で与えられた関数を最小化 (あるいは最大化) するものを計算する問題，また，その問題を対象とする研究分野である．組合せ最適化は上記の「与えられた集合」が離散的または組合せ構造を持つ最適化である．本稿では組合せ最適化の理論的研究をアルゴリズム理論と計算量理論の視点から概観し，特に「三次元描像」を提案する．これは組合せ最適化理論の研究者が暗に持っているものであるが，本稿ではそれを陽に示したい．

2 問題駆動型研究とアルゴリズム駆動型研究

非常に荒く不正確な (しかし直感的な) 言い方をすると，計算とは与えられた入力を処理し，処理結果を出力することであり，アルゴリズムとは与えられた問題を解く処理手続きのことである．組合せ最適化問題を解くアルゴリズムへの要求は
・どんな入力に対しても (入力の普遍性)
・高速な処理によって (処理の高速性)
・正しい出力を行なう (出力の正当性)
ということである．ここで「処理の高速性」をアルゴリズム理論や計算量理論では「多項式時間での処理」とする．これは Cobham [6]，Edmonds [10]，Iri [20] に始まる考え方とされているが，多項式時間で処理が可能かどうかは今までに提案されている多くの計算モデル (例えば，Turing 機械，ランダムアクセス機械，λ 計算など) が共有している性質であり，その意味で頑健な概念である．

組合せ最適化アルゴリズム設計においては，解きたい問題があり，その問題の構造を見ることでアルゴリズム設計指針を得て，その指針に従ってアルゴリズムを設計・解析する**問題駆動** (problem-driven) 型研究と，一般的なアルゴリズム設計指針を提案し，それを個別の問題に適用する**アルゴリズム駆動** (algorithm-driven) 型研究が存在する．実際の研究では問題駆動的視点とアルゴリズム駆動的視点を併用しているが，このような違いを意識することは重要である．

本稿の立場は「問題駆動」であり，問題駆動型研究では様々な問題を構造に従って分類する．問題を分類するという視点は計算量理論的であり，問題駆動型研究において計算量理論の知見が重要な役割を果たしている．

3 例とする組合せ最適化問題

本稿で扱う 4 つの組合せ最適化問題はどれも無向グラフに関わるものである．以後，入力として与えられる無向グラフの頂点数を常に n で表す．

・**最小頂点被覆問題**：無向グラフの**頂点被覆** (vertex cover) とは頂点部分集合 C で任意の辺に対してそれに接続する C の頂点が存在するもののことである．頂点被覆を含む頂点部分集合も頂点被覆である．**最小頂点被覆問題** (minimum vertex cover problem) とは与えられた無向グラフの頂点被覆の中で要素数が最小のものを見つける問題である．

・**最大独立集合問題**：無向グラフの**独立集合** (independent set) とは頂点部分集合 I で I の任意の 2 点が辺で結ばれていないもののことである．集合 C が頂点被覆であることと，C の補集合がそのグラフの独立集合であることは同値である．**最大独立集合問題** (maximum independent set problem) とは与えられた無向グラフの独立集合の中で要素数が最大のものを見つける問題である．

・**最大マッチング問題**：無向グラフの**マッチング** (matching) とは辺部分集合 M で M の任意の 2 辺 e, f がどの頂点も共有しないもののことである．**最大マッチング問題** (maximum matching problem) とは与えられた無向グラフのマッチングの中で要素数が最大のものを見つける問題である．

・**最小彩色問題**：無向グラフの k **彩色** (k-coloring) とは頂点への 1 から k までの整数によるラベル付けで任意の辺 e の両端点が異なるラベルを持つものである．ラベルのことを色とも呼ぶ．k 彩色は $k+1$ 彩色でもあることに注意する．**最小彩色問題** (minimum coloring problem) とは与えられた無向グラフに対して k の値を最小にする k 彩色を見つける問題である．

4　多項式時間可解性と NP 困難性

本節では上記 4 問題に対して「どんな入力に対しても高速な処理で正しい出力を行なう」ようなアルゴリズムが存在するか見ていく．そのようなアルゴリズムは普通の意味での**多項式時間アルゴリズム** (polynomial-time algorithm) であるが，それが存在することを示すためには，実際に設計する直接的方法と存在だけを示す間接的方法がある．

上記 4 問題の中で最大マッチング問題に対しては Edmonds [10] が直接的方法で存在を示した．彼の研究は「よい特徴づけ」(good characterization) という概念や多面体的組合せ論 (polyhedral combinatorics) の創始とされ，組合せ最適化理論の歴史の中で重要な研究として位置づけられている [33].

最大マッチング問題以外の 3 問題については多項式時間アルゴリズムが知られておらず，多くの研究者はそのようなアルゴリズムが存在しないと予想している．それは「あるもっともらしい計算量理論的な仮定の下でアルゴリズムは存在しない」といった傍証を与える形の結果である．Karp [23] は最小頂点被覆問題，最大独立集合問題，最小彩色問題が **NP 困難** (NP-hard) な問題であることを証明した．NP 困難な問題に対しては $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ という仮定の下で多項式時間アルゴリズムが存在しないことが知られている．多くの研究者は $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ が正しいと予想しているので，問題が NP 困難であることを証明することで多項式時間アルゴリズムの非存在性の証明の代わりとしているのが現状である (しかし，$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ や他の状況を考える研究者がいないわけではない [15])．NP 困難性に関する古典的な教科書は Garey & Johnson の本 [14] であり，詳細はそちらを参照のこと．

5　NP 困難性への挑戦—3 つのアプローチ

前節の内容から，最小頂点被覆問題，最大独立集合問題，最小彩色問題に対して「どんな入力に対しても高速な処理で正しい出力を行なう」アルゴリズムが存在しなそうであることが分かった．しかし，現実世界ではそのような問題に対しても何らかの「解」を得る必要がある．そのためには理想的な「どんな入力に対しても高速な処理で正しい出力を行なう」ことを諦めて，何かを妥協する必要がある ($\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ の証明を試みるアプローチもあるがここでは考えない)．計算は入力・処理・出力の 3 要素から構成されるので，それぞれを個別に妥協することを考えて，NP 困難問題に対して次の 3 つのアプローチを考える．

・**制限アプローチ** (restrictive approach)：「入力」を妥協し,「一部の入力に対して高速な処理で正しい出力を行なう」ことを目標とする．

・**厳密アプローチ** (exact approach)：「処理」を妥協し,「どんな入力に対してもある程度の速さで正しい出力を行なう」ことを目標とする．

・**近似アプローチ** (approximative approach)：「出力」を妥協し,「どんな入力に対しても高速な処理で近似的な出力を行なう」ことを目標とする．

以下の 3 つの節ではこれらのアプローチに基づいてどのような理論的研究が成されているかを概観する．

6　制限アプローチ：入力の普遍性を妥協

制限アプローチでは「一部の入力に対して高速な処理で正しい出力を行なう」アルゴリズムを考えるが，より小さな制限でこの目標が達成できれば理想に近くなる．したがって，入力をどう制限すればこれが可能か明確にすることが理論の目的である．

まず最小彩色問題を考える．最小彩色問題の入力グラフの最適値が 1 以下かどうかはグラフに辺があるか調べれば分かる．辺がなければ 1 であり，辺があれば 2 以上である．よって，最適値が 1 以下の入力に制限されれば最小彩色問題は多項式時間で解ける．では最適値が 2 以下に制限される場合はどうだろうか．実は，その場合はグラフ探索を用いて最小彩色問題を多項式時間で解ける．しかし，最適値が 3 以下に制限される場合で既に Karp [23] は最小彩色問題が NP 困難になることを示している．すなわち「最適値が k 以下である入力に制限する」とき k の値によって多項式時間アルゴリズムが存在するか NP 困難であるか鮮明に分離される．このような言明は**二分定理** (dichotomy theorem) と呼ばれ，Schaefer [35]

が一般化充足可能性問題 (generalized satisfiability problem) に対して同様な定理を証明したときに初めて用いた呼び方である．

最小彩色問題について (最適値の上界を用いた) 制限アプローチがどこまで有効か完全に分かった．では，残りの 2 問題はどうなのだろうか．

最小頂点被覆問題の入力として与えられる無向グラフに要素数 k の頂点被覆 C が存在すると仮定する．C は要素数 k の頂点部分集合をすべて見ることで発見でき，要素数 k の部分集合の総数は $\binom{n}{k} = \mathrm{O}(n^k)$ で，各部分集合が頂点被覆かどうかは多項式時間で確認できるので，計算量は $\mathrm{O}(n^k \mathrm{poly}(n))$ となる．したがって，k が定数 ($\mathrm{O}(1)$) ならば最小頂点被覆問題は多項式時間で解ける．しかし，よりよい以下の方法がある．任意の辺 e を見る．C は e の両端点の中の一方を要素として必ず含まなければならない．どちらか一方を選び，選んだ頂点に接続する辺をすべて除去し，残ったグラフで同様に任意の辺を見てその両端点の一方を選ぶことを繰り返す．この方針で再帰アルゴリズムが得られ，その再帰木の分枝係数 (branching factor) は 2 で高さは $\mathrm{O}(k)$ である (最適値が k 以下と仮定したから)．ゆえに，計算量は $\mathrm{O}(2^{\mathrm{O}(k)} \mathrm{poly}(n))$ となり，$k = \mathrm{O}(\log n)$ のとき多項式となる．これは Mehlhorn [31] のアルゴリズムである．

では，$k = \omega(\log n)$ の場合はどうだろうか．この場合には以下のような困難性の結果が知られている [5, 8]．$f(n) = \omega(\log n)$ を満たす任意の f に対して最適値が $\mathrm{O}(f(n))$ 以下である入力に制限した最小頂点被覆問題が多項式時間で解けることと $\mathrm{M}[1] = \mathrm{FPT}$ となることは同値である．計算量クラス $\mathrm{M}[1]$ や FPT は**パラメータ化計算量理論** (parameterized complexity theory) の概念である．詳細は Flum & Grohe の本 [13] を参照のこと．研究者は $\mathrm{M}[1] \neq \mathrm{FPT}$ を予想していて，k が $\omega(\log n)$ の場合に最小頂点被覆問題は多項式時間で解けないと考えている．すなわち，最小頂点被覆問題について最適値の上界が $\Theta(\log n)$ である場合に多項式時間で解けるかどうかの境界がある．

次に，最大独立集合問題を考えるが，これは最大化問題なので最適値の下界を扱う．最小頂点被覆問題と同様の手法で，最適値が $\mathrm{O}(1)$ 以上の入力に制限された最大独立集合問題は多項式時間で解ける．しかし，Downey & Fellows [9] は $f(n) = \omega(1)$ を満たす任意の f に対して最適値が $\Omega(f(n))$ 以上である入力に制限した最大独立集合問題が多項式時間で解けることと $\mathrm{W}[1] = \mathrm{FPT}$ が同値であることを示した．再び $\mathrm{W}[1]$ はパラメータ化計算量理論における概念であり，研究者は $\mathrm{W}[1] \neq \mathrm{FPT}$ であると予想している．すなわち，最大独立集合問題に対して境界が $\Theta(1)$ にあることになる．

まとめると，最適値の上界 (または下界) を制限した入力に対して問題が多項式時間で解けるかどうかの境界は最小彩色問題に対して 2 と 3 の間，最大独立集合問題に対して $\Theta(1)$，最小頂点被覆問題に対して $\Theta(\log n)$ と問題により異なる．

補足するが，入力の制限法は最適値の上界・下界によるものだけではない．例えば，グラフの構造的パラメータ (最大次数，木幅，種数など) やグラフの構造的特徴 (平面性，区間性，理想性など) による制限もあり，制限法により得られる結果は異なる．前者を含めた固定パラメータ・アルゴリズムの設計技法は Niedermeier の本 [32]，後者は Golumbic の本 [16] を参照のこと．

では，どんな問題のどんな入力の制限法に対しても上記のような二分法があるのだろうか．実はそうならないことの傍証を Ladner [28] が与えている．すなわち，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ ならば，NP 完全でもなく，多項式時間でも解けないような NP の問題が存在する．そのような問題は二分法の図式から外れる．

7　厳密アプローチ：処理の高速性を妥協

厳密アプローチでは「どんな入力に対してもある程度の速さで正しい出力を行なう」アルゴリズムを考えるが，できる限り速い処理でこれが達成できれば理想に近くなる．したがって，計算量をどこまで小さくできるか明確にすることが理論の目的である．

まずは最大独立集合問題を考える．制限アプローチのときと同様に，独立集合は頂点部分集合なので最大独立集合問題が $\mathrm{O}(2^n \mathrm{poly}(n))$ 時間で解けることはすぐに分かる．ここからどれだけ速くできるかが論点である．Robson [34] は複雑な分枝縮小法 (branch-and-reduce) と記憶化 (memoization) を用いて $\mathrm{O}(2^{n/4} \mathrm{poly}(n))$ 時間のアルゴリズムを設計した．ここで $2^{n/4} \approx 1.1892^n$ であり，2^n と $2^{n/4}$ の比は $2^{3n/4} \approx 1.6817^n$ である．すなわち，自明なアルゴリズムに比べて Robson のアルゴリズムはおよそ 1.6817^n 倍 (すなわち指数関数倍) 速く，大きく改善されたことが分かる．これが最大独立集合問題に対して知られている現在最速アルゴリズムである．

最大独立集合の補集合は最小頂点被覆なので，最適解を求める限りはこの 2 つの問題に違いがない (制

限・近似アプローチでは違いがあるので注意)．よって，最小頂点被覆問題に対しても Robson のアルゴリズムにより $O(2^{n/4}\mathrm{poly}(n))$ 時間で最適解が得られる．

最小彩色問題はどうだろうか．最適値の自明な上界は n なので，各頂点に n 色の中の 1 つを与えてそれが彩色であるかを確認していけば最適解が見つかる．色の与え方の場合の数は n^n なので，このアルゴリズムの計算量は $O(n^n\mathrm{poly}(n))$ となる．この自明なアルゴリズムよりも速いものを Lawler [29] は与えた．彼のアルゴリズムは部分集合縦断動的計画法 (dynamic programming across the subsets) により，計算量は $O((1+\sqrt[3]{3})^n\mathrm{poly}(n))$ である．ここで $1+\sqrt[3]{3} \approx 2.4423$ である．これを皮切りに最小彩色問題に対するアルゴリズムの改良が進み，現在最速アルゴリズムは包除原理 (inclusion-exclusion principle) による Björklund, Husfeldt & Koivisto [3] の $O(2^n\mathrm{poly}(n))$ 時間アルゴリズムである．高速指数時間アルゴリズムの設計技法については Woeginger [37] を参照のこと．

では，限界の方はどうなのだろうか．例えば，これらの問題に対して $O(2^{\sqrt{n}})$ 時間アルゴリズムは作れるのだろうか．Impagliazzo, Paturi & Zane [19] は**指数時間仮説** (exponential time hypothesis, ETH) を提案し，これら 3 つの問題のどれかが $2^{o(n)}$ 時間で解けることと指数時間仮説が正しくないことの同値性を証明した[1]．指数時間仮説とは「3 充足可能性問題を $2^{o(n)}$ 時間で解くアルゴリズムは存在しない」という仮説である．$P \neq NP$ 予想は「3 充足可能性問題を $\mathrm{poly}(n)$ 時間で解くアルゴリズムは存在しない」という言明と同値なので，指数時間仮説が正しければ $P \neq NP$ も正しい．また，制限アプローチの節で述べた $M[1] \neq FPT$ という予想が指数時間仮説と同値であることを Impagliazzo, Paturi & Zane [19] は示している．つまり，研究者は指数時間仮説が正しいと考えている．

8　近似アプローチ：出力の正当性を妥協

近似アプローチでは「どんな入力に対しても高速な処理で近似的な出力を行なう」アルゴリズムを考えるが，できる限り誤差の小さい近似が達成できれば理想に近くなる．したがって，近似誤差をどこまで小さくできるか明確にすることが理論の目的となる．

その前に近似の意味を明確にする．様々な近似概念が提案されているが，ここでは最も一般的な**近似比** (approximation factor) を導入する．最大化問題に対するアルゴリズム A の近似比が r であるとは，任意の入力に対して A の出力値が最適値の r 倍で下から抑えられることである．また，最小化問題に対するアルゴリズム A の近似比が r であるとは，任意の入力に対して最適値が A の出力値の r 倍で下から抑えられることである．どちらの場合も $r \leq 1$ であり，$r = 1$ であればそのアルゴリズムは理想的な (常に最適解を出力する) アルゴリズムである．すなわち，r が 1 に近いアルゴリズムほどよい．近似比が r のアルゴリズムを r 近似アルゴリズムと呼ぶ．

まず，最小頂点被覆問題を考える．この問題には以下のように簡単な多項式時間 1/2 近似アルゴリズムが存在する．まず，入力グラフの極大マッチング (それを真に含む任意の辺部分集合がマッチングにならないような集合) を任意に選ぶ．そして，極大マッチングの各辺の両端点をすべて集めた集合を出力する．この出力が頂点被覆になることはマッチングの極大性の帰結であり，近似比が 1/2 となることは任意の無向グラフにおいて任意のマッチングの要素数が任意の頂点被覆の要素数以下であることから従う．面白いことに，このアルゴリズムが知られている現在最良の近似比を持つ多項式時間アルゴリズムである (Karakostas [22] の $1/2 + \Theta(1/\sqrt{\log n})$ 近似アルゴリズムは近似比が $n \to \infty$ のとき 1/2 に収束する)．

近似にも限界がある．Dinur & Safra [7] は $P \neq NP$ ならば最小頂点被覆問題に対する 0.7352 近似多項式時間アルゴリズムが存在しないことを証明した．彼らの結果は**確率的検査可能証明** (probabilistically checkable proof) と呼ばれる概念とそれを用いた NP の特徴づけである PCP 定理 [1] を用いている．しかし，1/2 と 0.7352 の間にはまだギャップがある．このギャップを埋めるために Khot [24] の一意ゲーム予想 (unique games conjecture) を用いたのが Khot & Regev [26] であり，彼らは一意ゲーム予想が正しいならば，最小頂点被覆問題に対する近似比が 1/2 よりもよい定数の多項式時間アルゴリズムが存在しないことを証明した．一意ゲーム予想は PCP 定理よりも強い言明を予想している．一意ゲーム予想や PCP 定理に関する最近の動向は Khot のサーベイ記事 [25] を参照のこと．よって，最小頂点被覆問題の近似比に対して 1/2 が境界である．

他の問題はどうだろうか．最大独立集合問題について Boppana & Halldórsson [4] は $\Omega(\log^2 n/n)$ 近似多項式時間アルゴリズムを与え，Arora, Lund,

[1] この節で登場する $o(n)$ は本来 $o^{\mathrm{eff}}(n)$ でないといけないが，o^{eff} の定義も億劫なので，区別しないことにする．[13] 参照．

Motwani, Sudan, & Szegedy [1] は $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ ならば $1/n^{1-c}$ 近似多項式時間アルゴリズムが存在しないような定数 $c > 0$ の存在を証明した．また，仮定を $\mathrm{NP} \neq \mathrm{ZPP}$ に強めたとき，Håstad [18] は任意の定数 $\varepsilon > 0$ に対して $1/n^{1-\varepsilon}$ 近似多項式時間アルゴリズムが存在しないことを証明した．そして，更に仮定を $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{ZPTIME}(2^{\mathrm{O}(\log n(\log\log n)^{3/2})})$ に強めたとき Engebretsen & Holmerin [11] は $1/n^{1-f(n)}$ 近似多項式時間アルゴリズムが存在しないような関数 $f(n) = \mathrm{O}(1/\sqrt{\log\log n})$ の存在を証明した．Boppana & Halldórsson [4] の近似比は $\Omega(\log^2 n/n) = 1/n^{1-\mathrm{O}(\log\log n/\log n)}$ なので，Engebretsen & Holmerin の結果とギャップがあることが分かる．近似不可能性に関わる仮定の強弱については Johnson の記事 [21] が詳しい．

最小彩色問題についても同様な結果が知られている．現在最良の近似アルゴリズムは Halldórsson [17] により，限界については最大独立集合問題と同じ 3 つの仮定の下でそれぞれ Lund & Yannakakis [30], Feige & Kilian [12], Engebretsen & Holmerin [11] によって結果が得られている．最小彩色問題に対しても最大独立集合問題と同様のギャップがある．

本節の議論に関して近似アルゴリズムの教科書 [2, 36] は既に若干古いが，未だに重宝する．

9 組合せ最適化理論の三次元描像

ここまで制限アプローチ，厳密アプローチ，近似アプローチの概略を見た．どのアプローチにも共通することは妥協をしても結局限界があるということである．しかし，その限界を前にしてまた諦めるわけにもいかないので，その解決策として更に妥協することを考える．例えば，最小頂点被覆問題について「$\mathrm{O}(2^{\sqrt{n}}\mathrm{poly}(n))$ 時間 2/3 近似アルゴリズムの存在」や「最適値が $\mathrm{O}(\log^4 n)$ に制限された入力に対して多項式時間で 3/4 近似を達成すること」が否定されてはいない．類似の質問がいくらでも考えられるので，見通しをよくするために次のような**三次元描像** (three-dimensional view) を考える．

考える最適化問題を 1 つ固定し，三次元空間の非負象限を思い浮かべ，空間の各点は 1 つの状況を表す．原点は「理想的状況」で「どんな入力に対しても高速な処理で正しい出力を行なう」ことを表す．非負象限において原点から遠い点ほど理想的状況から遠い状況を表し，妥協の度合いも大きくなる．そして，その状況が達成可能かどうかを色で表す．達成可能ならば赤，達成不可能ならば青で塗ることにする．例えば最小頂点被覆問題に対して理想的状況は達成できないのでその三次元描像では原点を青く塗る．

では x 軸を「入力軸」として x 座標が大きくなるほど制限が小さな状況に対応させる．同様に y 軸は「処理軸」であるとして y 座標が大きくなるほど計算量が大きな状況に対応させる．また z 軸は「出力軸」であり，z 座標が大きくなるほど近似比が小さい状況に対応させる．そのとき，非負象限の 1 点 (x, y, z) は「制限の仕方が x の入力に対して計算量 y で近似比 z の出力を行なう」という状況に対応する．これが達成不可能ならば (x, y, z) を青く塗り，可能ならば赤く塗る．これによって三次元空間の非負象限の各点が青色か赤色で塗られ，青く塗られた点全体の集合 (達成不可能領域と呼ぼう) が達成不可能な状況を表し，赤く塗られた点全体の集合 (達成可能領域と呼ぼう) が達成可能な状況を表すことになる．これが三次元描像である．

この描像によって様々な質問に対する統一的な視点が得られる．まず，前節までの 3 アプローチが三次元描像上のどこに対応するか見ると，入力を妥協する制限アプローチで考えた状況は処理と出力に妥協がないので x 軸上の点に対応する．同様に，処理のみを妥協する厳密アプローチは y 軸上の点，出力のみを妥協する近似アプローチは z 軸上の点に対応する．そして本節の始めに挙げた例を見ると「$\mathrm{O}(2^{\sqrt{n}}\mathrm{poly}(n))$ 時間 2/3 近似アルゴリズムの存在」は yz 平面上のある点に対応する状況,「最適値が $\mathrm{O}(\log^4 n)$ に制限された入力に対して多項式時間で 3/4 近似を達成すること」は xz 平面上のある点に対応する状況を調べれば分かる．

また，三次元描像を思い描くことで様々な研究問題を見つけられる．組合せ最適化問題を 1 つ固定したときに，三次元描像のどの点についてその色 (赤か青か) が分かっていないのかを明確にし，青であってもそれがどのような計算量理論的仮定に基づいて証明されているかを関係付けられるようになる．例えば，いままで一意ゲーム予想は近似アプローチに関する不可能性の証明に用いられ，指数時間仮説は厳密アプローチに関する不可能性の証明に用いられていたが，一意ゲーム予想から厳密アプローチに関する不可能性を導出することはできるのだろうか．様々な問題が手付かずのまま残されていることが分かる．

本稿で考えた計算量は最悪時計算量であった．しかし，平均時計算量についても同様な議論ができ，別

の三次元描像が得られるだろう．また，本稿で考えたアルゴリズムはすべて決定性アルゴリズムであった．もし乱択アルゴリズム (乱数使用アルゴリズム) について同様な議論を行なうならば,「使用ランダムビット数」というランダム性に関する軸を付け加えるといよいだろう．いずれにせよ，本発表の三次元描像を変更することで様々な計算モデル，コストモデルに対応できるはずである．

参考文献

[1] S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, M. Szegedy. Proof verification and the hardness of approximation problems. J. ACM **45** (1998) 501–555.

[2] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi. Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties. Springer, 1999.

[3] A. Björklund, T. Husfeldt, M. Koivisto. Set partitioning via inclusion-exclusion. SIAM J. Comput., to appear.

[4] R.B. Boppana, M.M. Halldórsson. Approximating maximum independent sets by excluding subgraphs. BIT **32** (1992) 180–196.

[5] L. Cai, D.W. Juedes. On the existence of subexponential parameterized algorithms. J. Comput. Syst. Sci. **67** (2003) 789-807.

[6] A. Cobham. The intrinsic computational difficulty of functions. Proc. Logic, Methodology, and Philosophy of Science II. North Holland, 1965, pp. 24–30.

[7] I. Dinur, S. Safra. On the hardness of approximating minimum vertex-cover. Ann. Math. **162** (2005) 439-485.

[8] R.G. Downey, V. Estivill-Castro, M.R. Fellows, E. Prieto, F.A. Rosamond. Cutting up is hard to do: the parameterized complexity of k-cut and related problems. Electr. Notes Theor. Comput. Sci. **78** (2003).

[9] R.G. Downey, M.R. Fellows. Fixed-parameter tractability and completeness II: on completeness for W[1]. Theor. Comput. Sci. **141** (1995) 109–131.

[10] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. Canad. J. Math. **17** (1965) 449–467.

[11] L. Engebretsen, J. Holmerin. Towards optimal lower bounds for clique and chromatic number. Theor. Comput. Sci. **299** (2003) 537–584.

[12] U. Feige, J. Kilian. Zero knowledge and the chromatic number. J. Comput. Syst. Sci. **57** (1998) 187-199.

[13] J. Flum, M. Grohe. Parameterized Complexity Theory. Springer, 2006.

[14] M.R. Garey, D.S. Johnson. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman & Co., 1979.

[15] W.I. Gasarch. The P =? NP Poll. ACM SIGACT News **33**:2 (2002) 34–47.

[16] M.C. Golumbic. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. Second Ed. North Holland, 2004.

[17] M.M. Halldórsson. A still better performance guarantee for approximate graph coloring. Inf. Proc. Lett. **45** (1993) 19–23.

[18] J. Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$. Acta Math. **182** (1999) 105–142.

[19] R. Impagliazzo, R. Paturi, F. Zane. Which problems have strongly exponential complexity? J. Comput. Syst. Sci. **63** (2001) 512–530.

[20] M. Iri. Personal communication to S. Fujishige. Late 1970's.

[21] D.S. Johnson. The NP-completeness column: the many limits on approximation. ACM Trans. Algor. **2** (2006) 473–489.

[22] G. Karakostas. A better approximation ratio for the vertex cover problem. Proc. 32nd ICALP (2005) 1043–1050.

[23] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. Complexity of Computer Computations. Plenum, 1972, pp. 85–103.

[24] S. Khot. On the power of unique 2-prove 1-round games. Proc. 34th STOC (2002) 767–775.

[25] S. Khot. Inapproximability results via long code based PCPs. ACM SIGACT News **36**:2 (2005) 25–42.

[26] S. Khot, O. Regev. Vertex cover might be hard to approximated to within $2-\varepsilon$. J. Comput. Syst. Sci. **74** (2008) 335–349.

[27] B. Korte, J. Vygen. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Fourth Ed. Springer, 2007.

[28] R. Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. J. ACM **22** (1975) 155–171.

[29] E.L. Lawler. A note on the complexity of the chromatic number problem. Inf. Proc. Lett. **5** (1976) 66–67.

[30] C. Lund, M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. J. ACM **41** (1994) 960–981.

[31] K. Mehlhorn. Data Structures and Algorithms, Volume 2: NP-Completeness and Graph Algorithms. Springer, 1984.

[32] R. Niedermeier. Invitation to Fixed-Parameter Algorithms. Oxford University Press, 2006.

[33] W.R. Pulleyblank. The combinatorial optimization top 10 list. Plenary talk at 17th International Symposium on Mathematical Programming, 2000.

[34] J.M. Robson. Finding a maximum independent set in time $\mathrm{O}(2^{n/4})$. Manuscript, 2001.

[35] T.J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. Proc. 10th STOC (1978) 216–226.

[36] V.V. Vazirani. Approximation Algorithms. Second Printing Ed. Springer, 2004.

[37] G.J. Woeginger. Exact algorithms for NP-hard problems: a survey. Combinatorial Optimization — Eureka, You Shrink!, Lect. Notes Comput. Sci. **2570** (2001) 185–208.