凸多面体グラフの向き付け：数理とアルゴリズム
Polytopal Digraphs: Mathematics and Algorithms

岡本 吉央
Yoshio Okamoto

豊橋技術科学大学 工学部 情報工学系
Department of Information and Computer Sciences
Toyohashi University of Technology

Toyohashi 441-8580, Japan
okamotoy@ics.tut.ac.jp

概要

線型計画問題，線型相補性問題，双行列ゲームなどに対して，ピボット操作に基づくアルゴリズムが古くから提案されているが，それらを抽象化することで凸多面体グラフの向き付けが得られる．本講演では，そのような向き付けに対して知られていることや考えられている問題を紹介する．

Keywords: 凸多面体，ピボット・アルゴリズム，唯一シンク性，Holt-Klee 条件

1　はじめに

種々の問題に見られるピボット・アルゴリズム (pivoting algorithm) の多くは凸多面体のグラフ上の局所探索と見なすことができる．特に，線型計画問題，線型相補性問題，双行列ゲームに対しては古くからピボット・アルゴリズムが提案されて来た．線型計画問題に対する単体法 (simplex method) は Dantzig によって提案された最古のピボット・アルゴリズムであり [9]，それに類するものとして，線型相補性問題に対する Lemke 法 [35]，双行列ゲームに対する Lemke-Howson 法 [34] などが知られている．これらのアルゴリズムは単純で，実装が比較的容易であり，また実用上の性能も悪くないため，よく用いられている．しかし，理論的な観点から言うと，どれも多項式時間性を保証するものではなく，実際，Klee & Minty [33] は Dantzig の単体法によって必要とされるピボット操作の回数が不等式制約数の指数関数になってしまう問題例を構成した．

線型計画問題に対する多項式時間ピボット・アルゴリズムが存在するかどうかは数理計画法における大きな未解決問題である．この問題に取り組むため，ピボット操作から得られる凸多面体のグラフの向き付けを数理的に考察したい．そのような向き付けは古くから注目されてはいたが，現代的な凸多面体の理論において大きな役割を果たしており，また，アルゴリズムに対する帰結も注目すべきところである．本稿ではこれらの結果の一部を紹介していきたい．

次節では，凸多面体に関する基本的な用語を導入する．第 3 節では，線型計画問題や線型相補性問題から凸多面体のグラフの向き付けがどのように得られるか説明し，向き付けに

おけるシンクを発見することでそれらの問題を解くことができることを見る．第 4 節では，そのような向き付けが満たす性質を考察する．第 5 節では，そのような向き付けにおいてシンクを発見するためのアルゴリズムについて論じる．第 6 節ではその他の関連事項について補足する．

2　凸多面体の用語

この節ではまず凸多面体に関する基本的な用語を導入する．凸多面体の理論の初歩については Ziegler の本 [62] を参照していただきたい．

凸多面体 (convex polytope) とは，有限個の点の凸包として表現できる集合のことである．すなわち，それらの点全体を含む凸集合の中で (包含関係に関して) 極小なもののことである．凸集合の共通部分はまた凸集合であるから，そのような極小は唯一に定まる．凸多面体はいくつかの閉半空間の共通部分で有界なものとしても表現でき，この 2 表現の同値性は「凸多面体についての主定理」と呼ばれることもある．すなわち，任意の凸多面体はある行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を用いて，$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ という形で表現できる．ここで,「$A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$」という記法は左辺と右辺の各成分に対して不等号「$\le$」が成り立つことを意味している．

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の**次元** (dimension) とは，そのアフィン包の次元である．ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ と実数 $b \in \mathbb{R}$ を用いて書かれる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を変数とする不等式 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ が P に対する**妥当不等式** (valid inequality) であるとは，任意の $\boldsymbol{z} \in P$ に対して $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{z} \le b$ が成り立つことである．幾何的には，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り，その不等式の定める閉半空間に P が包含されることを意味し，その閉半空間の境界は超平面 $H = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$ を定める．凸多面体 P の**面** (face) とは，P に対する妥当不等式 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ を用いて，$P \cap \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} = b\}$ と書ける集合のことである．凸多面体 P の面もまた凸多面体であることに注意し，また，P 自身も P の面であり，空集合も P の面であることを補足する．凸多面体 P の面で，次元が 0 のものを P の**頂点** (vertex) と呼び，次元が 1 のものを P の**辺** (edge) と呼ぶ．また，P の次元が n のとき，P の面で次元が $n-1$ であるものを P の**ファセット** (側面，facet) と呼ぶ．

凸多面体 P の面全体の族に包含関係による半順序構造を考えたものを面束 (face lattice) と呼ぶ．2 つの凸多面体 P, P' が順序同型な面束を持つとき，それらは**組合せ同値** (combinatorially equivalent) であると呼ばれる．凸多面体の組合せ構造とは面束の構造のことである．

凸多面体 P のグラフとは，無向グラフ $G = (V, E)$ で，V は P の頂点全体から成る集合であり，E の辺が 2 頂点 u, v を結ぶのは，P において，u と v が同一辺上にあるとき，そのときに限る，として定義するものである．すなわち，凸多面体のグラフの頂点と辺はそのまま元の凸多面体の頂点と辺に対応している．

3　凸多面体グラフの向き付けと数理計画法

グラフ G の**向き付け** (orientation) とは，その各無向辺 $\{u, v\}$ を有向辺 (u, v) または (v, u) に置き換えることで得られる有向グラフのことである．以後，凸多面体のグラフの向き付け

を主に扱っていくが,「凸多面体の向き付け」という用語で凸多面体のグラフの向き付けを表すことにする.

有向グラフ D の頂点 v が D の**シンク** (sink) であるとは，v に接続する有向辺が全て v を終点とすることであり，同様に v が D の**ソース** (source) であるとは，v に接続する有向辺が全て v を始点とすることである．

では，凸多面体の向き付けが数理計画法において現れる様子を見てみよう．

3.1 線型計画法

線型計画問題 (linear program) とは，行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と 2 つのベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$\max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ を解く $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を見つける最適化問題である．この問題の**実行可能領域** (feasible region) とは $P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ であり，これが有界であるときは，凸多面体である．この記法を用いると上の問題は $\max\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in P\}$ と書き換えることができ，今後はこれを LP(P,$\boldsymbol{c}$) と表記する．以後，議論を簡略化するため，実行可能領域は常に非空かつ有界であるとする．すなわち，最適解は必ず存在する．

実行可能集合 P を固定する．線型計画問題 LP(P,$\boldsymbol{c}$) におけるベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が「P の任意の異なる 2 頂点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$ となる」という条件を満たすとき，このような $\boldsymbol{c}$ は P に対して**一般的** (generic) であると呼ばれる．ベクトル $\boldsymbol{c}$ が P に対して一般的であるような線型計画問題 LP(P,$\boldsymbol{c}$) を一般的な線型計画問題と呼ぶことにする．

一般的な線型計画問題 LP(P,$\boldsymbol{c}$) において，実行可能領域 P の各辺 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ を見る．ここで，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} < \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$ であるとき，無向辺 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ を有向辺 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に置き換え，そうでないとき，すなわち，$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} > \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y}$ となるとき，その無向辺を有向辺 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ に置き換えることで P の向き付けを得ることができる．これが線型計画問題 LP(P,$\boldsymbol{c}$) によって誘導される P の向き付けであり，この向き付けのシンクが LP(P,$\boldsymbol{c}$) に対する (唯一の) 最適解になっている．凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ の向き付けが **LP 向き付け** (LP-orientation) であることを，P と組合せ同値な多面体 P' と P' に対して一般的なベクトル $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ が存在して，線型計画問題 LP(P',$\boldsymbol{c}$) によって誘導される P' の向き付けからその向き付けが組合せ同型写像によって得られることと定義する．

Dantzig によって提案された線型計画問題に対する**単体法** (simplex method) は単純化して述べると，LP(P,$\boldsymbol{c}$) によって誘導される P の向き付けに沿って P の頂点を巡って行くことでシンク (すなわち最適解) を見つけるアルゴリズムである [9]．ここで,「向き付けに沿って」という部分がいわゆるピボット操作に対応していて，ある頂点から向き付けに沿って次の頂点に移るときにどの頂点を選択するかという規則がいわゆるピボット規則に対応している．

3.2 線型相補性問題

線型相補性問題 (linear complementarity problem) とは，行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ とベクトル $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$\boldsymbol{w} = M\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{z} = 0$, $\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ を見つける問題である．そのような解が存在するとは限らないことに注意する．

では，線型相補性問題に対するピボット操作の 1 つである主ピボット操作について説明する[1]．まず，LCP(M,$\boldsymbol{q}$) を考えたとき，各 $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対する w_i と z_i を**相補対** (complemantary pair) と呼ぶ．条件 $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{z} = 0$ と $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \geq 0$ から，任意の $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対して「$w_i = 0$ または $z_i = 0$」が得られる．いま，各 i に対して w_i と z_i のどちらかを 0 に定め，そう定めなかった変数を x_i と書くことにする．このとき，条件 $\boldsymbol{w} = M\boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i x_i$ と書ける．ただし，$\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^n$ は次のように定められるベクトルである．まず，$x_i = w_i$ のとき $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{e}_i$，すなわち，第 i 単位ベクトル (単位行列 I_n の第 i 列ベクトル) であり，次に，$x_i = z_i$ のとき $\boldsymbol{a}_i$ は $-\boldsymbol{m}_i$，すなわち，$-M$ の第 i 列ベクトルである．これは $x_1,\ldots,x_n$ を変数とする方程式系と考えることができて，この方程式系の非負解が元の LCP(M,$\boldsymbol{q}$) の解になることが分かる[2]．

先の方程式系 $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{a}_i x_i$ の解が一意に定まる (すなわち，行列 $A = (\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ が正則である) ときを考え，ベクトル $A^{-1}\boldsymbol{q}$ を見る．もし，このベクトルの第 i 成分が負であったら，x_i を入れ換える．すなわち，元々$x_i = w_i$ であったならば $x_i = z_i$ と置き直し，元々 $x_i = z_i$ であったならば $x_i = w_i$ と置き直すのである．それに対応させて，方程式系の $\boldsymbol{a}_i$ も置き直す．このようにして，新たな解候補を得る操作が**主ピボット操作** (principal pivoting) である[3]．

では，主ピボット操作に対応する凸多面体の向き付けを考えよう．上のように，各 $i \in \{1,\ldots,n\}$ に対して $x_i = w_i$ または $x_i = z_i$ の選択をして，それを固定する．このとき，$I(\boldsymbol{x}) \subseteq \{1,\ldots,n\}$ を $I(\boldsymbol{x}) = \{i \mid x_i = z_i\}$ と定義する．それぞれの選択 $\boldsymbol{x}$ に対して $I(\boldsymbol{x})$ が定まるため，$\{1,\ldots,n\}$ の部分集合どれもが $I(\boldsymbol{x})$ として起こりうる．ここで，頂点集合を $\{1,\ldots,n\}$ のべき集合として，2 つの集合 $I, J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ が隣接することをその対称差の要素数が 1 であることとして，無向グラフを定義する．このグラフは n 次元超立方体のグラフであることが分かる．主ピボット操作によって $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ が得られるとき，$I(\boldsymbol{x})$ と $I(\boldsymbol{x}')$ は隣接していることを補足する．

ここで，n 次元超立方体の隣接頂点 $I(\boldsymbol{x})$ と $I(\boldsymbol{x}')$ に対して，主ピボット操作によって $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ が得られるとき，$I(\boldsymbol{x})$ から $I(\boldsymbol{x}')$ へ向きを付けることによって，超立方体の向き付けを得ることを考える．しかし，このような向き付けが well-defined である保証はない．そのため，向き付けが定義されるような線型相補性問題のクラスを考えることにする．これは人工的なクラスではなくて，実用上も意味のあるクラスである．正方行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が **P-行列** (P-matrix) であるとは，M の全ての主小行列式 (principal minor，行添字と列添字が同一な小行列の行列式) が正となることである．線型相補性問題 LCP($M, \boldsymbol{q}$) で，M が P-行列であり，なおかつ，$\boldsymbol{q}$ が $n\times 2n$ 行列 $(I \mid -M)$ のどの $n-1$ 個の行の線型結合としても表せないとき (そのような $\boldsymbol{q}$ を M に関して一般的であると呼ぶことにする)，先の向き付けは well-defined であることが知られている．このようにして得られる超立方体の向き付けを **PLCP 向き付け** (PLCP-orientation) と呼ぶことにする．係数行列 M を P-行列とし，$\boldsymbol{q}$ が M に関して一般的であるような線型相補性問題 LCP($M, \boldsymbol{q}$) から得られる PLCP 向き付けのシンクがちょうど LCP($M, \boldsymbol{q}$) の解に対応する [54]．

---

[1]他のものとしては相補ピボット操作がある．

[2]幾何的に言うと，$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ の張る凸錐に $\boldsymbol{q}$ が含まれることである．

[3]ここで紹介した操作を単主ピボット操作 (single principal pivoting) と呼び，より一般的な操作を主ピボット操作と呼ぶこともある．

4　実現可能性と必要条件

凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ とその向き付けが与えられたとき，これがLP 向き付けかどうかを知るためにはどうしたらよいだろうか？ 本節ではこの問題と PLCP 向き付けに対する同様な問題を考察する．

4.1　LP 向き付けのための必要条件

任意の LP 向き付けが次の 3 条件を満たすことは容易に観察できる．

> [**非閉路性** (acyclicity)] 凸多面体 P の向き付けには有向閉路が存在しない．
>
> [**唯一シンク性** (unique sink property)] 凸多面体 P の向き付けに対して，それを P の任意の面上に制限した向き付けにはシンクが一意に存在する．
>
> [**唯一ソース性** (unique source property)] 凸多面体 P の向き付けに対して，それを P の任意の面上に制限した向き付けにはソースが一意に存在する．

非閉路性と唯一シンク性は Williamson Hoke [59] の完全単峰的順序 (completely unimodal ordering) や Kalai [30] の抽象目的関数 (abstract objective function) と同値な概念である．

最近まで，これら 3 つの条件よりも非自明な条件は知られていなかった．1998 年に Holt & Klee が発表した次の条件は画期的なものであった．

> [**Holt-Klee 条件** (Holt-Klee condition)] 凸多面体 P の向き付けに対して，それを P の任意の面 F 上に制限した向き付けには，(唯一の) ソースから (唯一の) シンクへ向けて k 個の内部頂点素な有向道の族が存在する．ただし，k は F の次元である．

Holt & Klee [26] は LP 向き付けがこの条件を満たすことを証明した．Holt-Klee 条件は「n 次元凸多面体のグラフは n 連結である」という Balinski [5] の定理の有向バージョンと見なすことができる．

これら 4 条件を満たす凸多面体の向き付けは全て LP 向き付けなのだろうか？ 2 次元以下の凸多面体に対してそれが正しいことは直ちに分かるが，実は 3 次元凸多面体に対しても正しいことが Mihalisin & Klee [42] によって証明されている．しかし，4 次元以上の場合にはこのような定理が成り立たない．実際，Morris [44] は 4 次元超立方体の向き付けで，上記 4 条件を満たしながらも LP 向き付けではないような例を構成した．そして，Pfeifle & Ziegler [46] は同様な向き付けをファセット数 7 の 4 次元多面体に対して見つけた．これは次元とファセット数に関して最小の例である (最小性は Felsner, Gärtner & Tschirschnitz [11] の結果から従う)．また，Develin [10] は n 次元超立方体において，n が大きくなると LP 向き付けと上記 4 条件を満たす向き付けの数の比が限りなく大きくなることを示した．少し趣が異なるが，Felsner, Gärtner & Tschirschnitz [11] はファセット数 9 の 7 次元多面体の上記 4 条件を満たす向き付けで LP 向き付けではない例を構成した (これは「ファセット数 − 次元」というパラメータに関して最小の例である)．

上記の 4 条件が LP 向き付けに対する必要条件として知られているもの全てである．4 次元凸多面体に対してさえ特徴づけが得られていないが，実は (向き付けをしていない) 4 次元多面体のグラフの特徴づけも知られていない．これは「4 次元凸多面体に対する普遍性定理」[47] と関連する問題であり，その難しさが窺える．

4.2 PLCP 向き付けのための必要条件

P-行列 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ と M に関して一般的なベクトル $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ による線型相補性問題 LCP$(M, \boldsymbol{q})$ が誘導する n 次元超立方体の PLCP 向き付けを考える．

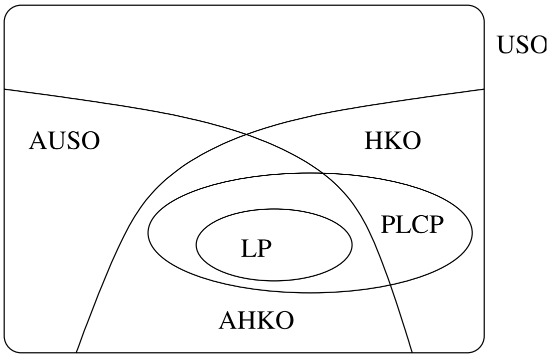
Stickney & Watson [54] は 1978 年の論文で PLCP 向き付けも唯一シンク性と唯一ソース性を持つことを証明した．ちなみに，超立方体に対して唯一シンク性と唯一ソース性は同値であることが知られている [25]．また，彼らは 3 次元 PLCP 向き付けの列挙も行ない，その中に非閉路性を満たさない (すなわち，閉路を持つ) 3 次元 PLCP 向き付けが存在することも見出した．そして最近，Gäertner, Morris & Rüst [18] は PLCP 向き付けが Holt-Klee 条件を満たすことを証明した．以上より，PLCP 向き付けは非閉路性を除く 3 条件を LP 向き付けと共有していることが分かった．

Stickney & Watson [54] による 3 次元 PLCP 向き付けの列挙から，3 次元立方体の向き付けが PLCP 向き付けであることと唯一シンク性と Holt-Klee 条件が成立することの同値性が分かる．4 次元以上の場合については，前節で言及した Morris [44] の向き付けが実は PLCP 向き付けでもないことから，この同値性が成り立たないことも分かる．同様に，前節で言及した Develin [10] の結果も PLCP 向き付けに適用することができる．

Stickney & Watson [54] は 3 次元 PLCP 向き付けの列挙に基づき「3 次元以上の超立方体の向き付けが PLCP 向き付けであるとき，出次数が偶数となる頂点全体はファセットを誘導しない」という予想を立てた．3 次元の場合には Stickney & Watson [54] による列挙からこれが正しいことは分かっている．更に 4 次元の場合には Morris [44] が，5 次元の非閉路的向き付けに対しては Moriyama & Okamoto [43] がこの予想を証明している．

4.3 包含関係

Morris [45] は超立方体の LP 向き付けは PLCP 向き付けでもあることを示し，LP 向き付けと PLCP 向き付けの関係を明らかにした．したがって，超立方体の向き付けの間には次の図のような包含関係がある．



ここで,「USO」というのは唯一シンク性を満たす向き付け (unique sink orientation) のことであり，先にも述べた通り，超立方体に対しては唯一シンク性と唯一ソース性が同値であることに注意する．また「AUSO」というのは非閉路的な USO (acyclic unique sink orientation) のことであり,「HKO」は Holt-Klee 条件を満たす USO (Holt-Klee orientation),「AHKO」とは非閉路的な HKO (acyclic Holt-Klee orientation) のことを表す．超立方体とは限らない凸多面体に対しては，上の図から PLCP を取り除き，また「USO」を唯一シンク性と唯一ソース性の両者を満たす向き付けとすれば正しい包含関係が得られる．

5　アルゴリズム

線型計画問題は凸多面体の LP 向き付けにおけるシンクを探す問題として定式化され，P-行列を係数行列とする線型相補性問題は超立方体の PLCP 向き付けにおけるシンクを探す問題として定式化されることを説明した．本節では，凸多面体の向き付けにおいてシンクを探す問題に対するアルゴリズムを考える．

まず，計算モデルについて説明する．与えられるものは，凸多面体とその向き付けであるが，向き付けは陽に与えられるのではなく，次のようなオラクルを通じて与えられるものとする．それは，凸多面体の頂点に対して質問をすると，その頂点に接続する辺の向きを全て返すというものである．計算量はこのオラクルへの質問回数で測るものとし，向き付けのシンクをオラクルへ入力して，その頂点がシンクであることを直接確かめられた時点でアルゴリズムは終了するものとする．また，凸多面体はその非冗長な不等式表現で与えられるものとし (すなわち，各不等式が多面体の各ファセットに対応する)，退化していない (すなわち単純多面体である) と仮定する．

また，Gärtner & Schurr [20] は任意の線型計画問題が超立方体の USO におけるシンクを探す問題に多項式時間で帰着できることを示しているので，ここで補足しておきたい．(その帰着で得られる USO は非閉路的であるとは限らないことに注意する．)

5.1　決定性ピボット・アルゴリズム

決定性アルゴリズムは乱数を用いないアルゴリズムである．そのため，アルゴリズムの計算量が大きくなるような例を構成することが比較的容易である．そのため，否定的な結果が多い．

線型計画問題に対する単体法はピボット・アルゴリズムの原型である．ここでは凸多面体の組合せ構造しか見ていないので，量的な構造を用いたアルゴリズムは用いない．組合せ構造のみを見るので，ピボット・アルゴリズムは次のような形で記述できる．まず，凸多面体の任意の頂点からアルゴリズムの実行を開始する．そして，その頂点から出る辺を何らかの規則に従って選び，その辺の終点を次の頂点とする．これがシンクであればアルゴリズムを終了し，そうでなければ，その頂点から出る辺をまた先程の規則に従って選んでいく．これをシンクに到達するまで繰り返すのである．上で「何らかの規則」と表現したものがいわゆる「ピボット規則」である．乱数を用いないピボット規則に基づくアルゴリズムが決定性ピボット・アルゴリズムである．

組合せ構造のみを用いた決定性ピボット・アルゴリズムとしては，Bland の最小添字規則 [8] がある[4]．これは凸多面体のファセット全体の集合上に線型順序を与え，そのピボット規則は「頂点から出る辺の中で与えた線型順序において最小のファセットを離れるものを選ぶ」というものである．これに対して，Klee & Minty [33] によるいわゆる **Klee-Minty 立方体** (Klee-Minty cube) に対する計算量が 2^n になることを Avis & Chvátal [4] は示した．LP 向き付けのような非閉路的向き付けにおいて，ピボット・アルゴリズムは同じ頂点を二回以上訪れることがないので，この結果はつまり，Bland の規則が超立方体の全ての頂点を一度ずつ訪れることがあることを意味する．Klee-Minty 立方体と同様な LP 向き付けの例が他の (組合せ的であるとは限らない) 決定性ピボット・アルゴリズムに対しても知られていて，凸多面体の**変形積** (deformed product) を用いた統一的視点が Amenta & Ziegler [3] によって与えられている．それを用いて彼らは Bland の最小添字規則の計算量が $\Omega(m^{\lfloor n/2 \rfloor})$ となるようなファセット数 m の n 次元凸多面体の LP 向き付けの存在を示した．これは「ファセット数 m の n 次元凸多面体の頂点数が $\mathrm{O}(m^{\lfloor n/2 \rfloor})$ である」という凸多面体の上限定理 [41, 52] に合致するタイトな結果である．また，退化のある線型計画問題に対しても同様な下界が Kaluzny [31] によって与えられている．

この変形積は LP 向き付けのみならず，他のところでも有用であることが知られていて，例えば，Fukuda & Kaluzny [12] は線型計画問題に対する十文字法 (criss-cross method，これは多面体上ではなく超平面アレンジメントの上のピボット・アルゴリズムと見なせる) の最小添字バージョンが超平面アレンジメントのほとんど全ての頂点を通過してしまうような例を構成するために変形積の概念を一般化し，また，Ziegler [63] は 4 次元凸多面体の f-ベクトルの特徴づけを得る研究の方向性の中で凸多角形の変形積を用いた構成から fatness というパラメータが大きな 4 次元凸多面体の例を与えている．

他にも決定性ピボット・アルゴリズムとして Zadeh [60] によるものがある．Zadeh のアルゴリズムではピボット規則として，今いる頂点から出る辺の中でこれまでの訪問回数が最も多いファセットから離れるものを選ぶ．このアルゴリズムはいわゆる「無記憶性」を持たず，Klee-Minty 立方体のような悪い例が (LP 向き付けに限らない) USO に対しても知られておらず，多項式時間でシンクが見つかる可能性もまだ秘めている．

5.2 ピボット操作に基づかない決定性アルゴリズム

ここでは，超立方体の USO (唯一シンク性を満たす向き付け) に限って話を進め，Szabó & Welzl [55] によるピボット操作に基づかない決定性アルゴリズムを 2 つ紹介する．これらはピボット操作に基づかないので，オラクルに質問する頂点が直前に質問した頂点に隣接している必要がなく，それがこの計算モデルの強さである．実際，線型相補性問題においてそのような質問は多項式時間で可能であり，紹介するアルゴリズムの中の 1 つは P-行列を係数行列とする線型相補性問題に対する組合せ的アルゴリズムとして理論的に現在最速のものである．

まず，n 次元超立方体のグラフは要素数 n の集合 S のべき集合 2^S を頂点集合として，2 つの頂点 $A, B \in 2^S$ が辺で結ばれるとき，そのときに限り，A と B の対称差の要素数が 1 であるものと見なすことができる．簡単のために，この超立方体のグラフそのものを 2^S と

[4] それに対して，例えば Dantzig の最大係数規則は組合せ的でないピボット・アルゴリズムである．

書くことにする．また，2 つの部分集合 $A, B \subseteq S$ が $A \subseteq B$ を満たすとき，区間 $[A, B]$ を $[A, B] := \{X \mid A \subseteq X \subseteq B\}$ と定義すると，これが誘導する 2^S の部分グラフは元の超立方体の面 (これもまた超立方体) のグラフであり，その次元は $|B| - |A|$ である．

このような超立方体の構造を利用してアルゴリズムを設計する．1 つ目は**積型アルゴリズム** (product algorithm) である．このアルゴリズムを説明するために，まず，集合 $C \subseteq S$ を固定し，2^S の USO から超立方体 2^C の向き付けを次のように得る．まず，任意の $X \subseteq C$ に対して区間 $[X, X \cup (S \setminus C)]$ を考えると，これは次元 $n-k$ の超立方体である (ただし，$k = |C|$ とする)．唯一シンク性から，この超立方体の上に元の向き付けを制限したものも USO である．この区間のシンクを s_X と書く．今，$X, Y \subseteq C$ が 2^C において隣接していて，ある $x \in C \setminus Y$ を用いて $X \cup \{x\} = Y$ と書けるとする．このとき，$s_X \cup \{x\}$ は 2^Y の頂点であり，$s_Y \setminus \{x\}$ は 2^X の頂点である．ここで，2^S 全体の向き付けにおいて s_X から $s_X \cup \{x\}$ へ有向辺がある場合，2^C において X から Y へ有向辺を置き，s_Y から $s_Y \setminus \{x\}$ へ有向辺がある場合，2^C において Y から X へ有向辺を置く．これで，2^C の向き付けが得られ，実際に USO にもなることは元の向き付けが USO であったことから従う．(また，元の向き付けに閉路が含まれなければ，得られた向き付けにも閉路は含まれない．) そのことから,「s_Y から $s_Y \setminus \{x\}$ へ有向辺がある」という条件と「$s_X \cup \{x\}$ から s_X へ有向辺がある」という条件が同値であることも分かる．

では，2^S の USO におけるシンクを見つける代わりに今のように構成した 2^C の USO におけるシンクを見つけてみよう．しかし，オラクルは 2^S の向き付けに対するものであり，2^C の向き付けに対するものではない．そこで，2^S に対するオラクルから 2^C に対するオラクルを作るのである．例えば，2^C において $X \subseteq C$ に接続する辺の向きを知ることを考える．構成法に基づくと，$[X, X \cup (S \setminus C)]$ のシンクを知る必要があり，そのために 2^S に対するオラクルを用いる．シンク s_X が見つかったら，そのときに s_X に接続する辺の向きも全て知ることになるので，そこから 2^C において X に接続する辺の向きも全て分かることになる．よって，2^C に対するオラクルが構成できた．今，ℓ 次元超立方体のシンクを見つけるための最悪計算量を $t(\ell)$ と書くことにすると，2^C に対するオラクルへの 1 つの質問に対して，2^S に対するオラクルへは高々$t(n-k)$ 回質問をすることになる．そして，2^C のシンク Z が見つかったとき，オラクルの構成法より，対応する 2^S の頂点 s_Z も見つかっており，この s_Z が 2^S 全体のシンクになっているわけである．すなわち，s_Z を見つけるために 2^C へのオラクルに高々$t(k)$ 回質問をし，その各質問は 2^S へのオラクルに高々$t(n-k)$ 回質問することで実現できるわけなので，全体の計算量を考えると $t(n) \leq t(n)t(n-k)$ という不等式が得られる．この式から，任意の自然数 k に対して $t(n) \leq t(k)^{\lceil n/k \rceil}$ が得られ，例えば $t(2) = 3$ であるので $t(n) = \mathrm{O}(3^{n/2}) = \mathrm{O}(1.732^n)$ となる．よい上界を得るためにはより大きな定数 k に対する $t(k)$ を知ればよく，$t(4) = 7$ を示すことができるので，これによって，$t(n) = \mathrm{O}(7^{n/4}) = \mathrm{O}(1.623^n)$ が得られる．

2 つ目は Szabó & Welzl [55] によって **Fibonacci シーソー** (Fibonacci Seesaw) と名付けられたアルゴリズムである．このアルゴリズムは n 個のフェーズから構成されるフェーズの添字 i は 0 から始まり $n-1$ で終わる．フェーズ i でアルゴリズムは対蹠の位置にある 2 つの i 次元面とそれらのシンクを保持し，次のフェーズに移行するときにそれらの面を拡大することで超立方体全体のシンクを見つけようとするのである．具体的には次のように進行する．超立方体 2^S の面 $[A, B]$ の**対蹠面** (antipodal face) とは，$[S \setminus B, S \setminus A]$ のことである．ある面の対蹠面の対蹠面はその面自身であり，面とその対蹠面の次元は等しい．Fibonacci

シーソーのフェーズ i では，i 次元面 $F=[A,B]$ とその対蹠面 G，および，それぞれのシンク $s_F \in F, s_G \in G$ を保持している．そのどちらかが全体のシンクであるならばアルゴリズムは終了する．そうでないときには，ある $x \in (S \setminus B) \cup A$ が存在して F を x の方向に拡大した面 F' において s_F が再びシンクになっているか，G を x の方向に拡大した面 G' において s_G が再びシンクになっているかどちらかが成り立つ[5]．これは唯一シンク性の帰結である．そのような x を見つけたら，一般性を失わずに s_F が F' のシンクであるとする．このとき，G' は F' の対蹠面であるが，保持する情報のために G' のシンクを見つける必要がある．そのためには，G' のシンクが s_G であるか，そうでなければ G' における G の対蹠面に存在するので，G の対蹠面のシンクを発見すれば十分である．これによって，フェーズ i+1 を F' と G'，およびそれらのシンクを用いて開始できる．このアルゴリズムと 4 次元超立方体の USO のシンクを高々7 回のオラクル問合せで見つけるアルゴリズムを組み合わせることで，$\mathrm{O}(1.606^n)$ という計算量が得られる．詳細は元論文 [55] を参照のこと．

下界に関して，Schurr & Szabó [50] はどんな決定性アルゴリズムも $\Omega(n^2/\log n)$ 回のオラクル問合せを行なわないとそのシンクを見つけられない n 次元超立方体の AUSO を構成した．また，Schurr & Szabó [51] は Kaibel [27] の提案した最下対蹠アルゴリズム (bottom-antipodal algorithm) という (ピボット操作に基づかない) 決定性アルゴリズムが指数関数的なオラクル問合せ回数を必要とする超立方体の AUSO も構成した．

5.3 ランダム・ファセット規則

ここまでは決定性アルゴリズムを扱ってきたが，ここからは乱択アルゴリズム (確率的アルゴリズム，乱数使用アルゴリズム) を考える．乱択アルゴリズムの計算量として，インスタンスに対する計算量の期待値を全てのインスタンスの上で最大化した，いわゆる最悪期待計算量を考える．

線型計画問題に対する乱択ピボット・アルゴリズムとして主要なものに「ランダム・ファセット規則」と「ランダム辺規則」がある．ここではまず前者を取り上げ，後者のランダム辺規則に関しては次節で扱う．

ランダム・ファセット規則 (random facet rule) とは次のようなピボット・アルゴリズムである．凸多面体の任意の頂点からアルゴリズムの実行は開始し，今いる頂点から出る辺がなければアルゴリズムは終了する．そうでない場合を考える．出る辺がちょうど 1 つの場合には，その辺に沿って次の頂点に移動する．出る辺が 2 つ以上の場合には，その頂点を含むファセットを一様ランダムに選び，そのファセット上でアルゴリズムを再帰的に実行する．その再帰によって頂点が見つけられたら，その頂点からまたピボット操作を繰り返す．この規則は Kalai [29] によるものであるが，ほぼ同時に Sharir & Welzl [53] も等価なアルゴリズムを与えている．この等価性は線型計画問題の双対性より導かれるが，それは Goldwasser [23] による観察である．

Kalai [29] と Matoušek, Sharir & Welzl [39] はファセット数 m の n 次元凸多面体の AUSO に対して，ランダム・ファセット規則のオラクル問合せ回数の期待値が $\exp(\mathrm{O}(\sqrt{n \log m}))$ となることを示した．これは線型計画問題に対する準指数関数的乱択ピボット・アルゴリズム

[5] 面 $F=[A,B]$ を x の方向に拡大した面とは，$x \in A$ のとき $[A \setminus \{x\}, B]$ という面のことで，$x \notin B$ のとき $[A, B \cup \{x\}]$ という面のことである．

である．Gärtner [14] は n 次元超立方体の AUSO に対するランダム・ファセット規則の短い解析を紹介していて，その計算量は高々$\exp(2\sqrt{n})$ である．

下界に関しては何が知られているのだろうか？ Matoušek [38] は n 次元超立方体の AUSO でランダム・ファセット規則が行なうオラクル問合せ回数の期待値が $\exp(\Omega(\sqrt{n}))$ になってしまうものを構成した．よって，ランダム・ファセット規則の計算量に関しては漸近的に合致する上界と下界が得られたことになる．

ただし，Matoušek [38] の与えた超立方体の AUSO は LP 向き付けである必要がない．実際，Gärtner [14] は Matoušek の向き付けの中で LP 向き付けであるものだけに着目し，Holt-Klee 条件を用いることでそのような向き付けに対してはランダム・ファセット規則の計算量が $\mathrm{O}(n^2)$ になることを示した．これは LP 向き付けが満たすべき必要条件を考えることによってアルゴリズムの計算量を改善することが可能であることを示すよい例になっている．Klee-Minty 立方体は Matoušek の向き付けから得られる LP 向き付けの例であり，これに対して，Gärtner, Henk & Ziegler [16] はランダム・ファセット規則の計算量が $\Theta(n^2)$ になることを証明しているので，上記の Gärtner [14] の解析がタイトであることも分かる．

非閉路的であるとは限らない USO に対してランダム・ファセット規則がどのように振る舞うのか，よく分かっていない．

5.4 ランダム辺規則

ランダム辺規則 (random edge rule) はランダム・ファセット規則とは異なる乱択ピボット規則であり，これは現在いる頂点から出る辺の中から 1 つを一様ランダムに選んで次の頂点に到達するというものである．

ランダム辺規則は解析が困難なアルゴリズムとしてこの分野では名高い．そのため，特定の多面体のクラスに限ってアルゴリズムを解析する研究がなされて来ている．

超立方体の PLCP 向き付けに対して，Morris [45] はランダム辺規則のオラクル問合せ回数の期待値が $\Omega(((n-1)/2)!)$ となるものを与えている．これは閉路をたくさん含むような PLCP 向き付けの例になっている．注意したいことは，n 次元超立方体の頂点数は 2^n であることである．したがって，この Morris の例ではランダム辺規則が同じ頂点を何度も何度も訪れることになっている．この Morris の向き付けを Gärtner の講義ノート [15] は分かりやすく解説している．上界としては，(PLCP 向き付けより一般的な) 超立方体の USO に対して Gärtner [15] が $\mathrm{O}(n^{n+1})$ を与えている．

考えている凸多面体の向き付けが非閉路的である場合，ランダム辺規則の計算量はその多面体の頂点数以下になるが，それより少しよい上界が最近 Gärtner & Kaibel [17] によって得られた．それによると，頂点数 v の n 次元凸多面体の AUSO に対してランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(v/\sqrt{n})$ となる．また，任意の自然数 t に対して，n 次元超立方体の AUSO に対してはランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(2^n/n^t)$ となることも彼らは証明している (オーダー記法の比例定数は t に依存する)．

では，特定のクラスの多面体を考えて行く．まず，Klee-Minty 立方体を考える．Kelly [32] は Klee-Minty 立方体に対してランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(n^2)$ になることを示した．同様な考察は Williamson Hoke [59] や Gärtner, Henk & Ziegler [16] にもある．下界としては Gärtner, Henk & Ziegler [16] が $\Omega(n^2/\log n)$ を証明し，最近 Balogh & Pemantle [6]

が下界を $\Omega(n^2)$ に改善した．これによって，Klee-Minty 立方体に対して計算量の期待値が $\Theta(n^2)$ になることが分かった．

では，n 次元超立方体のその他の向き付けについても $\mathrm{O}(n^2)$ の上界，あるいは n に関する多項式の上界を得ることはできるのだろうか？ そのような上界はランダム・ファセット規則に対する悪い例であった Matoušek の向き付け [38] に対しても成り立つので，一時は n 次元超立方体の AUSO に対してランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(n^2)$ になるのではないかと信じられていた時期もあった．しかし，それは Matoušek & Szabó [40] によって粉砕された．彼らは，n 次元超立方体の AUSO でランダム辺規則の計算量が高確率で $\exp(\Omega(n^{1/3}))$ となるような例を構成した．ただし，彼らの例は Holt-Klee 条件を満たさないので，超立方体の AHKO に対してランダム辺規則がどのように振る舞うのかはいまだによく分かっていないことになる．

単体 (simplex) の USO に対して，ランダム辺規則の計算量の期待値が $\Theta(\log n)$ になることは簡単な計算で分かる．単体の USO は同型を除いて 1 通りしかなく，それは LP 向き付けでもあることに注意する．単体の次元が n のとき，そのファセット数は $n+1$ である．そのため，n 次元単純凸多面体でファセット数が $n+2$ のものについてランダム辺規則の振る舞いを調べることが次のステップとなる．これは Gärtner, Solymosi, Tschirschnitz, Valtr & Welzl [21] が考察した問題である．彼らは，ファセット数 $n+2$ の n 次元単純多面体の LP 向き付けに対してランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(\log^2 n)$ になることを示し，また，それが $\Omega(\log^2 n)$ になるような LP 向き付けの例を構成した．Felsner, Gärtner & Tschirschnitz [57] は同じ上界を AHKO へ拡張している (Tschirschnitz [57] も参照のこと)．ファセット数 $n+3$ の n 次元単純多面体について Tschirschnitz [57] はランダム辺規則の計算量の期待値が $\Omega(\log^3 n)$ になる LP 向き付けを構成している．

次に 3 次元単純多面体を考えよう．ファセット数 n の 3 次元多面体の頂点数は Euler の公式から高々$2n$ である．そのため，3 次元単純多面体の LP 向き付けに対するピボット・アルゴリズムの計算量が $\mathrm{O}(n)$ になることは直ちに分かる．よって，問題となるのはオーダー記法の中の比例定数である．Kaibel, Mechtel, Sharir & Ziegler [28] はファセット数 n の 3 次元単純多面体に対して，ランダム辺規則の計算量の期待値が $1.4943n$ 以下，$1.3473n$ 以上であることを示した．また，彼らは他の様々なピボット規則についても比例定数を定め，そのどれよりもランダム辺規則の比例定数が小さいことを確かめた．先に述べた Mihalisin & Klee [42] の定理より，3 次元凸多面体の LP 向き付けは AHKO と同値であることを再度補足する．

4 次元単純多面体に関しては知られていることが少ない．Gillmann [22] は 4 次元巡回多面体 (cyclic polytope) の極 (polar) を考察し，そのような多面体のファセット数が n のとき，ランダム辺規則の計算量の期待値が $\mathrm{O}(n)$ となることを示した．

また少し文脈から外れるが，割当問題に対してランダム辺規則が多項式時間アルゴリズムであることを Tovey [56] は証明している．

5.5 ピボット操作に基づかない乱択アルゴリズム

超立方体の USO に対しては，先に紹介した積型アルゴリズムを乱択アルゴリズムに応用することができ，計算量の解析も同じである．この場合もよい上界を得るためには大きな定数 k に対する $t(k)$ を知ればよい．Rote [48] によると乱択アルゴリズムに対して $t(3) =$

$4074633/1369468 < 2.976$ が成り立つので，$t(n) = \mathrm{O}(t(3)^{n/3}) = \mathrm{O}(1.438^n)$ が得られる．

6　その他の関連事項

この節では，凸多面体の向き付けとアルゴリズムに関連する他の話題を簡単にまとめる．

6.1　ゲーム理論

Gärtner & Rüst [19] は単純確率ゲーム (simple stochastic game) の両プレイヤーの最適戦略を求める問題が単体の積の USO におけるシンクを見つける問題に多項式時間帰着できることを示した．単体の積の USO に対するシンク発見アルゴリズムは Gärtner, Morris & Rüst [18] が研究している．また，Ludwig [37]，Björklund & Vorobyov [7]，Halman [24] は単純確率ゲームにランダム・ファセット規則を適用することを考え，この問題に対して準指数関数時間アルゴリズムを設計した．

双行列ゲーム (bimatrix game) に対する Lemke-Howson 法 [34] からも凸多面体の向き付けを導くことができる．これについては von Stengel の解説 [58] が詳しい．Lemke-Howson 法が $n \times n$ 双行列ゲームの Nash 均衡を求めるために必要とするピボット操作回数のに対して，Savani & von Stengel [49] は巡回多面体の極を用いることでおよそ 1.434^n という下界を導いた．

6.2　局所探索

多くの組合せ最適化問題における局所探索による局所的最適化は，n 次元超立方体の (USO とは限らない) 向き付けにおけるシンクを発見する問題として定式化できる．ただし，この枠組においてオラクルは超立方体の各頂点に割り当てられた目的関数値そのものを返すものとし，解釈としては，目的関数値の小さい頂点の方に大きな頂点から辺が向かっているものとする．そのような一般的な枠組に対して，Llewelyn, Tovey & Trick [36] はどのような決定的アルゴリズムも $\Omega(2^n/\sqrt{n})$ 回のオラクル問合せを必要とすることを示した．乱択アルゴリズムに対しては，Aldous [2] が $2^{n/2-\mathrm{o}(n)}$ という下界を示したが，最近，Aaronson [1] がこれを $\Omega(2^{n/2}/n^2)$ に改善し，さらに Zhang [61] は $\Omega(2^{n/2}\sqrt{n})$ に改善した．これらの改善は量子計算量理論で培われた技法を基にして行なわれているところが興味深い．

6.3　有向マトロイド実現可能性

Fukuda, Moriyama & Okamoto [13] は凸多面体の向き付けで Holt-Klee 条件を満たさないものを用いて，実現不可能な有向マトロイドを構成する試みを行なっている．これは，有向マトロイド計画法における実行可能領域となるトープの向き付けが Holt-Klee 条件を満たさないと，元となる有向マトロイドが実現可能になれない，という観察を通して行なう，いわゆる「主」 (primal) の側の構成法と，ある種の擬直線から得られるシェリング (トープ・シェリング) が Holt-Klee 条件を満たさない向き付けを誘導するとき，元となる有向マトロ

イドが実現可能になれない，という観察を通して行なう，いわゆる「双対」 (dual) の側の構成法に分けられる．これらの構成法に関しては不明な点がまだ多く，研究の余地を多く残している．詳細については原論文 [13] を参照のこと．

謝辞

凸多面体の向き付けに興味を持ち始めたのは，筆者が ETH チューリッヒの大学院生として研究をし始めたときのことである．この分野を紹介して下さった Emo Welzl 氏，および，本稿に関わる様々な事柄を共に議論して下さった福田公明氏と森山園子氏に感謝いたします．また，本原稿を書く機会を与えて下さった平田富夫氏にも感謝いたします．

参考文献

[1] S. Aaronson. Lower bounds for local search by quantum arguments. *SIAM Journal on Computing*, 35:804–824, 2006.

[2] D.J. Aldous. Minimization algorithms and random walk on the d-cube. *Annals of Probability*, 11:403–413, 1983.

[3] N. Amenta and G.M. Ziegler. Deformed products and maximal shadows of polytopes. In B. Chazelle, J.E. Goodman, and R. Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volume 223 of *Contemporary Mathematics*, pages 57–90. American Mathematical Society, 1998.

[4] D. Avis and V. Chvátal. Notes on Bland's rule. *Mathematical Programming Study*, 8:24–34, 1978.

[5] M.L. Balinski. On the graph structure of convex polyhedra in n-space. *Pacific Journal of Mathematics*, 11:431–434, 1961.

[6] J. Balogh and R. Pemantle. The Klee-Minty random edge chain moves with linear speed. *Random Structures & Algorithms*, to appear.

[7] Henrik Björklund and Sergei Vorobyov. Combinatorial structure and randomized subexponential algorithms for infinite games. *Theoretical Computer Science*, 349:347–360, 2005.

[8] R.G. Bland. New finite pivoting rules for the simplex method. *Mathematics of Operations Research*, 2:103–107, 1977.

[9] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

[10] M. Develin. LP-orientations of cubes and crosspolytopes. *Advances in Geometry*, 4:459–468, 2004.

[11] S. Felsner, B. Gärtner, and F. Tschirschnitz. Grid orientations, $(d, d+2)$-polytopes, and arrangements of pseudolines. *Discrete & Computational Geometry*, 34:411–437, 2005.

[12] K. Fukuda and B. Kaluzny. The criss-cross method can take $\Omega(n^d)$ pivots. In *Proceedings of 20th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG)*, pages 401–408, 2004.

[13] K. Fukuda, S. Moriyama, and Y. Okamoto. The Holt-Klee condition for oriented matroids. Manuscript, 2006.

[14] B. Gärtner. The random-facet simplex algorithm on combinatorial cubes. *Random Structures & Algorithms*, 20:353–381, 2002.

[15] B. Gärtner. Randomized algorithms: An introduction through unique sink orientations. Lecture Notes, ETH Zurich, 2004.

[16] B. Gärtner, M. Henk, and G.M. Ziegler. Randomized simplex algorithms on Klee-Minty cubes. *Combinatorica*, 18:349–372, 1998.

[17] B. Gärtner and V. Kaibel. Two new bounds for the random-edge simplex algorithm. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, to appear.

[18] B. Gärtner, W.D. Morris, Jr., and L. Rüst. Unique sink orientations of grids. In *Proceedings of 11th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*, volume 3509 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 210–224, 2005.

[19] B. Gärtner and L. Rüst. Simple stochastic games and P-matrix generalized linear complementarity problems. In *Proceedings of 15th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT)*, volume 3623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 209–220, 2005.

[20] B. Gärtner and I. Schurr. Linear programming and unique sink orientations. In *Proceedings of 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 749–757, 2006.

[21] B. Gärtner, J. Solymosi, F. Tschirschnitz, P. Valtr, and E. Welzl. One line and n points. *Random Structures & Algorithms*, 23:453–471, 2003.

[22] R. Gillmann. The random edge simplex algorithm on dual cyclic 4-polytopes. Preprint available at arXiv:math.CO/0605117, 2006.

[23] M. Goldwasser. A survey of linear programming in randomized subexponential time. *SIGACT News*, 26(2):96–104, 1995.

[24] N. Halman. *Discrete and Lexicographic Helly Theorems and Their Relations to LP-Type Problems*. PhD thesis, School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, 2004.

[25] P. Hammer, B. Simeone, T. Liebling, and D. de Werra. From linear separability to unimodality: A hierarchy of pseudo-Boolean functions. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete methods*, 1:174–184, 1988.

[26] F.B. Holt and V. Klee. A proof of the strict monotone 4-step conjecture. In B. Chazelle, J.E. Goodman, and R. Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volume 223 of *Contemporary Mathematics*, pages 201–216. American Mathematical Society, 1998.

[27] V. Kaibel. Bottom-top graphs. Presentation at "Towards the Peak," Workshop on Unique Sink Orientations and Combinatorial Methods for Optimization, 2001.

[28] V. Kaibel, R. Mechtel, M. Sharir, and G.M. Ziegler. The simplex algorithm in dimension three. *SIAM Journal on Computing*, 34:475–497, 2005.

[29] G. Kalai. A subexponential randomized simplex algorithm. In *Proceedings of 24th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 475–482, 1992.

[30] G. Kalai. Linear programming, the simplex algorithm and simple polytopes. *Mathematical Programming*, 79:217–234, 1997.

[31] B.L. Kaluzny. *Linear Programming: Pivoting on Polyhedra and Arrangements*. PhD thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, 2005.

[32] D.G. Kelly. Some results on random linear programs. *Methods of Operations Research*, 40:351–355, 1981.

[33] V. Klee and G.J. Minty. How good is the simplex algorithm? In O. Shisha, editor, *Inequalities III*, pages 159–175. Academic Press, New York, 1972.

[34] C. Lemke and J.T. Howson, Jr. Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, 12:413–423, 1964.

[35] C.E. Lemke. On complementary pivot theory. In G.B. Dantzig and A.F. Veinott, editors, *Mathematics of the Decision Sciences, Part 1*, volume 11 of *Lectures in Applied Mathematics*, pages 95–114. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.

[36] D.C. Llewellyn, C.A. Tovey, and M.A. Trick. Local optimization on graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 23:157–178, 1989. Erratum in Discrete Applied Mathematics 46:93–94, 1993.

[37] W. Ludwig. A subexponential randomized algorithm for the simple stochastic game problem. *Information and Computation*, 117:151–155, 1995.

[38] J. Matoušek. Lower bounds for a subexponential optimization algorithm. *Random Structures & Algorithms*, 5:591–607, 1994.

[39] J. Matoušek, M. Sharir, and E. Welzl. A subexponential bound for linear programming. *Algorithmica*, 16:498–516, 1996.

[40] J. Matoušek and T. Szabó. RANDOM EDGE can be exponential on abstract cubes. *Advances in Mathematics*, 204:262–277, 2006.

[41] P. McMullen. The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17:179–184, 1970.

[42] J. Mihalisin and V. Klee. Convex and linear orientations of polytopal graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 24:421–435, 2000.

[43] S. Moriyama and Y. Okamoto. The even outdegree conjecture for acyclic $PLCP$-cubes in dimension five. *IEICE Transactions on Information and Systems*, E89-D:2402–2404, 2006.

[44] W.D. Morris, Jr. Distinguishing cube orientations arising from linear programs. Manuscript, 2002.

[45] W.D. Morris, Jr. Randomized principal pivot algorithms for P-matrix linear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 92:285–296, 2002.

[46] J. Pfeifle and G.M. Ziegler. On the monotone upper bound problem. *Experimental Mathematics*, 13:1–11, 2004.

[47] J. Richter-Gebert. *Realization Spaces of Polytopes*, volume 1643 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[48] G. Rote. Optimal randomized strategies for unique sink orientations of the 3-cube. Presentation at "Towards the Peak," Workshop on Unique Sink Orientations and Combinatorial Methods for Optimization. Resources available at http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/workshops/01-lc/grote.html, 2001.

[49] R. Savani and B. von Stengel. Hard-to-solve bimatrix games. *Econometrica*, 74:397–429, 2006. Erratum available at http://www.maths.lse.ac.uk/Personal/stengel/bvs-publ.html.

[50] I. Schurr and T. Szabó. Finding the sink takes some time. *Discrete & Computational Geometry*, 31:627–642, 2004.

[51] I. Schurr and T. Szabó. Jumping doesn't help in abstract cubes. In *Proceedings of 11th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO)*, volume 3509 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 225–235, 2005.

[52] R. Seidel. The upper bound theorem for polytopes: An easy proof of its asymptotic version. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 5:115–116, 1995.

[53] M. Sharir and E. Welzl. A combinatorial bound for linear programming. In *Proceedings of 9th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, volume 577 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 569–579, 1992.

[54] A. Stickney and L. Watson. Digraph models of Bard-type algorithms for the linear complementary problem. *Mathematics of Operations Research*, 3:322–333, 1978.

[55] T. Szabó and E. Welzl. Unique sink orientations of cubes. In *Proceedings of 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 547–555, 2001.

[56] C.A. Tovey. Low order polynomial bounds on the expected performance of local improvement algorithms. *Mathematical Programming*, 35:193–224, 1986.

[57] F. Tschirschnitz. *LP-related properties of polytopes with few facets*. PhD thesis, Department of Computer Science, ETH Zurich, 2003.

[58] B. von Stengel. Computing equilibria for two-person games. In R.J. Aumann and S. Hart, editors, *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, volume 3, pages 1723–1759, Amsterdam, 2002. Elsevier. Chapter 45.

[59] K. Williamson Hoke. Completely unimodal numberings of a simple polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 20:69–81, 1988.

[60] N. Zadeh. What is the worst-case behaviour of the simplex algorithm? Technical Report 27, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA, 1980.

[61] S. Zhang. New upper and lower bounds for randomized and quantum local search. In *Proceedings of 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 634–643, 2006.

[62] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1998.

[63] G.M. Ziegler. Projected products of polygons. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 10:122–134, 2004.